
فكرة
فى
الإحصاء
STATISTICS
للصف الثالث الثانوى





تعريف الارتباط :

هو طريقة إحصائية يمكن من خلالها تحديد درجة ونوع العلاقة بين متغيرين.

تعريف الارتباط الطردى :

يكون الارتباط بين متغيرين س ، ص طرديا إذا كان : بزيادة س تزداد ص ، وإذا قلت س تقل ص. ويكون هذا الارتباط موجبا.

تعريف الارتباط العكسى :

يكون الارتباط بين الظاهرتين س ، ص عكسيا إذا كان : بزيادة س تقل ص ، وعندما تقل س تزداد ص. ويكون هذا الارتباط سالبا.

معامل الارتباط

معامل الارتباط يرمز له بالرمز ر) وهو عبارة عن مقياس كمي نسبي يقيس قوة الارتباط بين متغيرين حيث $-1 \leqslant ر \leqslant 1$

لاحظ أن :

1- **قيمة ر تكون موجبة فى حالة الارتباط الطردي وتكون سالبة فى حالة الارتباط العكسي .**
2- **ر = صفر (فى حالة الارتباط المنعدم (الصفري))**
3- **ر = ١ (فى حالة الارتباط الطردي التام)**
   ر = - ١ (فى حالة الارتباط العكسي التام)
4- **$-1 \leqslant$ معامل الارتباط $\leqslant 1$**

ويوجد عدة طرق لإيجاد معامل الارتباط :

معامل ارتباط بيرسون

إذا كان لدينا متغيرين س، ص وحصلنا على قيم للمتغير س وعلى قيم مناظرة للمتغير ص فإن معامل ارتباط بيرسون أو " معامل الارتباط الخطى " بين المتغيرين س، ص ويرمز له بالرمز ر يعطى بالعلاقة

$$ر = \frac{ن(\sum س ص) - (\sum س)(\sum ص)}{\sqrt{ن(\sum س^2) - (\sum س)^2 \times ن(\sum ص^2) - (\sum ص)^2}}$$

حيث ن عدد قيم كل من المتغيرين أو عدد المفردات ، ($\sum$) رمزاً للتجميع وتقرأ مجموع.

أمثلة توضيحية

مثال من بيانات الجدول الآتى:

س	٢	١	٤	٦	٥	٣
ص	٨	٥	٩	١٢	٩	٦

احسب معامل الارتباط لبيرسون بين قيم س، ص وحدد نوعه.

الحل:

س	ص	$س^٢$	$ص^٢$	س ص
٢	٨	٤	٦٤	١٦
١	٥	١	٢٥	٥
٤	٩	١٦	٨١	٣٦
٦	١٢	٣٦	١٤٤	٧٢
٥	٩	٢٥	٨١	٤٥
٣	٦	٩	٣٦	١٨
٢١	٤٩	٩١	٤٣١	١٩٢

نجد من الجدول أن :

$\sum$ س = ٢١ ، $\sum$ ص = ٤٩ ، $\sum س^٢ = ٩١$ ، $\sum ص^٢ = ٤٣١$

$\sum$ س ص = ١٩٢ ، ن = ٦

$$ر = \frac{ن \sum س ص - (\sum س)(\sum ص)}{\sqrt{ن \sum س^٢ - (\sum س)^٢} \sqrt{ن \sum ص^٢ - (\sum ص)^٢}}$$

$$ر = \frac{٦ \times ١٩٢ - ٢١ \times ٤٩}{\sqrt{٦ \times ٩١ - (٢١)^٢} \sqrt{٦ \times ٤٣١ - (٤٩)^٢}}$$

$$ر = \frac{١٣٢}{\sqrt{١٠٥} \sqrt{١٨٥}} = \frac{132}{139.37}$$

ر = ٠,٨٨٣ (والارتباط طردي) لأن ناتج ر موجب

مثال أحسب معامل ارتباط بيرسون بين س، ص من البيانات التالية:

$\sum$ ن = ٨ ، $\sum$ س = ٣٣ ، $\sum$ ص = ٢٤ ، $\sum$ $س^2$ = ٢٢٠

$\sum$ $ص^2$ = ١٠٦ ، $\sum$ س ص = ١٤٥

الحل:

$$ر = \frac{ن \sum س ص - (\sum س)(\sum ص)}{\sqrt{ن \sum س^2 - (\sum س)^2} \sqrt{ن \sum ص^2 - (\sum ص)^2}}$$

$$ر = \frac{٨ \times ١٤٥ - ٣٣ \times ٢٤}{\sqrt{٨ \times ٢٢٠ - (٣٣)^2} \sqrt{٨ \times ١٠٦ - (٢٤)^2}}$$

$$ر = \frac{٣٦٨}{\sqrt{٦٧١} \sqrt{٢٧٢}}$$

$$ر = \frac{368}{427.2142} = ٠,٨٦١$$ (ارتباط طردي قوي)

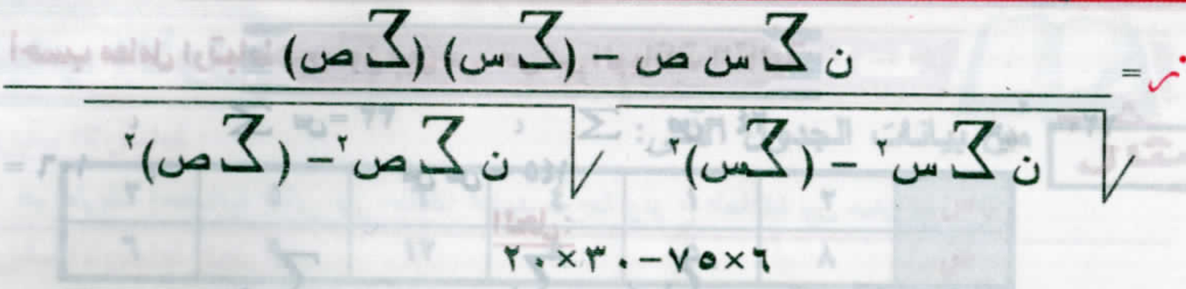
مثال لدراسة العلاقة بين الكمية المعروضة (ص) من سلعة ما والسعر (س) بالجنية كانت لدينا البيانات الآتية:

السعر (س)	٩	٦	٣	٧	١	٤
الكمية (ص)	١	٣	٤	٢	٦	١

أوجد معامل ارتباط بيرسون بين الكمية المعروضة والسعر مبيناً نوعه.

الحل

س	ص	$س^2$	$ص^2$	س ص
٩	١	٨١	١	٩
٦	٣	٣٦	٩	١٨
٣	٤	٩	١٦	١٢
٧	٢	٤٩	٤	١٤
١	٦	١	٣٦	٦
٤	٤	١٦	١٦	١٦
٣٠	٢٠	١٩٢	٨٢	٧٥



$$ر = \frac{ن \sum س ص - (\sum س)(\sum ص)}{\sqrt{ن \sum س^2 - (\sum س)^2}\ \sqrt{ن \sum ص^2 - (\sum ص)^2}}$$

$$ر = \frac{٦ \times ٧٥ - ٣٠ \times ٢٠}{\sqrt{٦ \times ١٩٢ - (٣٠)^2}\ \sqrt{٦ \times ٨٢ - (٢٠)^2}}$$

$$ر = \frac{-١٥٠}{\sqrt{٢٥٢}\ \sqrt{٩٢}} = -٠,٩٨٥$$ (ونوعه عكسي)

معرفة درجة الارتباط بيانيا

مثال وضح نوع الارتباط الذى يمثله شكل الانتشار في كل مما ياتى

الحل:

١- شكل الانتشار يمثل (ارتباط طردي) لأن معظم النقط\ تنتشر حول خط مستقيم يميل جهة اليمين (ميل موجب)

٢- شكل الانتشار يمثل (ارتباط عكسي) لأن معظم النقط تنتشر حول خط مستقيم يميل ناحية اليسار (ميل سالب)

٣- شكل الانتشار يمثل (ارتباط غير خطى) لأن النقط تتجمع حول منحني.

٤- شكل الانتشار ارتباط (لا يوجد ارتباط) لأن معظم النقط لا تتجمع حول خط مستقيم أو منحنى ولكنها مبعثرة.

مثال

اختر معامل الارتباط الأقوى فيما يلي:

١) -٠,٩ ٢) -٠,٥ ٣) ٠,٣ ٤) ٠,٨

الحل:

معامل الارتباط الأقوى هو -٠,٩ لأنه يقترب من الواحد والسالب هنا يعني أنه عكسي أى أنه ارتباط عكسي قوى لاحظ أن -٠,٩ ارتباط أقوى من ٠,٨ لأننا نحكم على قوة الارتباط بقيمة العدد إما الإشارة فتعني طردي أو عكسي.

تدريبات ١

١) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١ـ معامل الارتباط الأقوى فيما يلي هو ....

(−٠,٩٤ ، أ، صفر ، أ، ٠,٥ ، أ، ٠,٨٥)

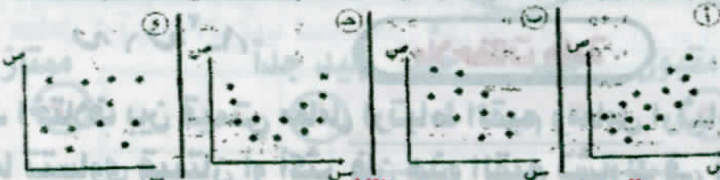
٢ـ أقوى معامل ارتباط عكسي فيما يلي هو ....

(−٠,٢ ، أ، −٠,٥ ، أ، −٠,٧ ، أ، −٠,٨)

٣ـ أحد الأعداد التالية يمكن أن يمثل أقوى معامل ارتباط عكسي بين متغيرين......

(٠,٣ ، أ، ٠,٩ ، أ، −١,١ ، أ، −٠,٩٥)

٤ـ شكل الانتشار الذي يمثل ارتباط طردي هو....................



٢) من بيانات الجدول التالي أوجد معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س، ص

س	١	٢	٥	٣	٧
ص	٨	٤	٦	٥	١١

٣) من بيانات الجدول التالي أوجد معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س، ص وبين نوعه:

س	٢	٤	٦	٨	١٠
ص	١	٢	٣	٤	٥

٤) مصر ١٩٩٩ إذا كان:

$\sum$ س = ١٤ ، $\sum$ ص = ٩

$\sum$ س ص = ١٩٢ ، $\sum$ س^{2} = ٢٥٢

$\sum$ ص^{2} = ١٧١ ، ن = ٧

احسب معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س ، ص وحدد نوعه.

٥) مصر ١٩٩٨ أوجد معامل الارتباط الخطى بين المتغيرين س، ص وحدد نوعه: إذا كان:

$\sum$ س = ٦٠ ، $\sum$ ص = ٧٠

$\sum$ س ص = ٣٧٤ ، $\sum$ س^{2} = ٤٠٦

$\sum$ ص^{2} = ٥٣٦ ، ن = ١٠



معامل ارتباط سبيرمان (الرتب)

إذا أردنا دراسة العلاقة بين متغيرين وكانت البيانات التى لدينا ليست كمية (ليست أرقام) ولكنها وصفية (كلمات) مثل تقديرات المواد فى الجامعة (مقبول – جيد ـ امتياز) فإن هذه البيانات لا يصلح معها استخدام معامل ارتباط بيرسون لأن طريقة بيرسون لا تصلح إلا مع البيانات الكمية (الأرقام) ولكن فى هذه الحالة نستخدم طريقة أخري تعرف بمعامل ارتباط سبيرمان (الرتب) وهو يعطى مقياساً للارتباط فى حالة وجود البيانات الكمية (أرقام) أو الوصفية التى لها صفة الترتيب أى يمكن ترتيبها وتعتمد هذه الطريقة على ترتيب البيانات حسب أهميتها أو حجمها أو تسلسلها مع الأخذ فى الاعتبار أن يكون الترتيب تصاعدياً أو تنازلياً، ثم نوجد معامل ارتباط الرتب لسبيرمان من العلاقة الآتية:

$$ر = ١ - \frac{٦ \sum ف^{٢}}{ن(ن^{٢}-١)}$$

حيث (ف) هى الفرق بين رتب المتغيرين، ن عدد قيم كل من المتغيرين

ملاحظات هامة

- يوجد اختلاف بين قيمتي معامل ارتباط القيم ومعامل ارتباط الرتب.
- عندما تتساوى قيمتان أو أكثر فإن هذه القيم تشترك فى ترتيب واحد، وتأخذ رتبة متساوية هى الوسط الحسابى للرتب التى كانت تأخذها هذه القيم لو أنها كانت مختلفة.

مثال

احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان للمتغيرين س، ص من الجدول التالي مع بيان نوع الارتباط:

س	٣٢	١٥	١٣	٢٨	١٠	١٥	٨
ص	٣٦	٢٥	١٨	٤٥	٣٠	٢٥	٢٥

الحل:

س	ص	رتب س	رتب ص	ف	ف^{٢}
٣٢	٣٦	٧	٦	١	١
١٥	٢٥	٤,٥	٣	١,٥	٢,٢٥
١٣	١٨	٣	١	٢	٤
٢٨	٤٥	٦	٧	١ـ	١
١٠	٣٠	٢	٥	٣ـ	٩
١٥	٢٥	٤,٥	٣	١,٥	٢,٢٥
٨	٢٥	١	٣	٢ـ	٤
				صفر	٢٣,٥

$$\therefore ر = ١ - \frac{٦ \sum ف^{٢}}{ن(ن^{٢}-١)}$$

$$\therefore ر = ١ - \frac{32.5\times6}{(1-49)7} = ١ - ٠٤٢. = ٠,٥٨$$

والارتباط طردي.





مثال من بيانات الجدول الآتى:

س	ممتاز	مقبول	جيد	مقبول	ضعيف	جيد جداً
ص	جيد	جيد	ممتاز	ضعيف	مقبول	جيد جداً

احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين س، ص

الحل:

س مرتبة تصاعدياً : ضعيف مقبول مقبول جيد جيد جداً ممتاز

رتـــــب س : ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦

2.5 2.5

ص مرتبة تصاعديا: ضعيف مقبول جيد جيد جيد جداً ممتاز

رتـــــب ص: ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦

3.5 3.5

س	ص	رتب س	رتب ص	ف	ف٢
ممتاز	جيد	٦	٣,٥	٢,٥	٦,٢٥
مقبول	جيد	٢,٥	٣,٥	١-	١
جيد	ممتاز	٤	٦	٢-	٤
مقبول	ضعيف	٢,٥	١	١,٥	٢,٢٥
ضعيف	مقبول	١	٢	١-	١
جيد جداً	جيد جداً	٥	٥	٠	٠
				صفر	١٤,٥

$$ر = ١ - \frac{٦ \sum ف^٢}{ن(ن^٢ - ١)}$$

$$ر = ١ - \frac{1.45\times 6}{(1-36)6} = ٠,٥٨٦$$

تدريبات ١

١) احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين المتغيرين س ، ص من الجدول الآتي:

س	٢٥	٧٠	٥٥	٨٠	١٥
ص	١٠	٣٠	٤٠	٥	٢٠



٢) احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين المتغيرين س ، ص من الجدول الآتي:

س	٣٥	٢٨	١٥	١٣	٨
ص	١٢	٢٥	٣٢	٥٤	٦٥

٣) مصر ١٩٩٩ من بيانات الجدول الآتي:

س	ممتاز	جيد	جيد جداً	مقبول	ضعيف	جيد
ص	جيد	ضعيف	مقبول	ممتاز	جيد جداً	مقبول

احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين س ،ص.

٤) مصر ٢٠٠٠ من بيانات الجدول الآتي:

س	جيد جداً	جيد جداً	جيد	ضعيف	مقبول	جيد جداً
ص	جيد	مقبول	جيد	ممتاز	جيد جداً	مقبول

احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين س ،ص.

الانحدار

علمنا أن الارتباط يحدد مدى العلاقة بين متغيرين وفى هذا الدرس سوف ندرس الانحدار تعريفه كما يلي:

> **(الانحدار)**
> هو أسلوب إحصائي يمكن بواسطته تقدير قيمة أحد المتغيرين بمعلومية قيمة المتغير الآخر.

وذلك عن طريق معادلة خط الانحدار وهى معادلة يمكن تكوينها من بيانات المتغيرين وهذه المعادلة تفيدنا في عملية التنبؤ بأحد المتغيرين في حالة معرفتنا بالمتغير الآخر.

وسنقتصر في هذا الدرس على الانحدار الخطى البسيط فقط ومعادلته هي:

معادلة خط انحدار

معادلة خط انحدار ص على س هي: ص= أ س + ب

$$\text{حيث: أ} = \frac{ن(\sum س\,ص) - (\sum س) \times (\sum ص)}{ن(\sum س^{٢}) - (\sum س)^{٢}} \quad ، \quad \text{ب} = \frac{\sum ص - أ \sum س}{ن}$$

وتسمى أ بمعامل انحدار ص علي س

وهى تعبر عن ميل خط الانحدار على الاتجاه الموجب لمحور السينات ويمكن إيجاد قيمة الثابت ن من العلاقة ب= ص − أ س

الوسط الحسابى س̅ = مجموع القيم ÷ عددهم

∑ س = ن س̅ ، ∑ ص = ن ص̅

حيث س̅ هى الوسط الحسابى لقيم س ، ص̅ هى الوسط الحسابى لقيم ص

ملحوظه

المتغير ص̅ المطلوب تقديره أو التنبؤ به يسمى المتغير التابع والمتغير س يسمى المتغير المستقل.

١- في المعادلة ص= أ س + ب يسمى ب طول الجزء المقطوع من محور الصادات ويسمى أ معامل انحدار ص على س وهو يعبر عن ميل خط الانحدار على الاتجاه الموجب لمحور السينات

لدراسة العلاقة بين الكميات الطويلة من سلعة معينة (س) بالطن والسعر المناظر لها (ص) بالألف جنية فى ستة فترات مختلفة كانت لدينا البيانات التالية:

الكميات المطلوبة (س)	٣	٥	٧	٦	٨	١٠
السعر (ص)	٢	٤	٥	٤	٦	٨

١) أوجد معادلة خط انحدار السعر على الكميات المطلوبة.
٢) تنبأ بقيمة ص بالجنية عندما س=٤.
٣) اوجد مقدار الخطأ فى السعر إذا علمت أن الكمية المطلوبة ٧ طن.

الحل

س	ص	$س^2$	$ص^2$	س ص
٣	٢	٩	٤	٦
٥	٤	٢٥	١٦	٢٠
٧	٥	٤٩	٢٥	٣٥
٦	٤	٣٦	١٦	٢٤
٨	٦	٦٤	٣٦	٤٨
١٠	٨	١٠٠	٦٤	٨٠
٣٩	٢٩	٢٨٣	١٦١	٢١٣

١) معادلة خط انحدار السعر على الكميات المطلوبة أي معادلة خط انحدار ص على س هي ص= أ س + ب.

∴ نوجد أ، ب أولا ثم نعوض فى المعادلة

$\therefore$ أ = $\dfrac{ن \sum س ص - \sum س \times \sum ص}{ن \sum س^{٢} - (\sum س)^{٢}} = \dfrac{29\times39-213\times6}{283\times6-(39)2}$

$= \dfrac{147}{177} = ٠,٨٣٠٥$

ب = $\dfrac{\sum ص - أ \sum س}{ن} = \dfrac{29 - 39\times0.8305}{6} = -٠,٥٦٤٩$

$\therefore$ ص = ٠,٨٣٠٥ س − ٠,٥٦٤٩

٢) للتنبؤ بقيمة ص عندما س= ٤ فإننا نعوض فى المعادلة عن قيمة س = ٤

$\therefore$ ص= ٠,٨٣٠٥ × ٤ −٠,٥٦٤٩ = ٥,٢٤٨٦

٣) لإيجاد مقدار الخطأ فى السعر إذا كانت الكمية المطلوبة ٧ طن نوجد القيمة التى تحقق معادلة الانحدار أى نعوض عن س= ى٧

فتكون ص= ٠,٨٣٠٥ ×٧− ٠,٥٦٤٩ = ٥,٢٤٨٦

والقيمة الجدولية اى القيمة الموجودة فى الجدول المعطى عند س= ٧ هى ٥.

$\therefore$ مقدار الخطأ =| القيمة الجدولية−= القيمة التى تحقق معادلة الانحدار|

=| ٥−٥,٢٤٨٦| = ٠,٢٤٨٦

مثال

في دراسة إحصائية لإيجاد العلاقة بين متغيرين س ، ص حصلنا على البيانات التالية:

$\overline{س}$= ٧، $\overline{ص}$= ٥ ، $\sum$ س ص= ٣٤٥ ، $\sum$ س^{٢} = ٥٢٤ ، ن= ٨

فأوجد:

١) معامل انحدار ص على س. ٢) معادلة خط انحدار ص على س.

الحــل

$\because \overline{س} = \dfrac{\sum س}{ن}$ $\therefore ٧ = \dfrac{\sum س}{٨}$ $\therefore \sum س = ٥٦$

$\bar{\text{ص}} = \frac{\sum \text{ص}}{\text{ن}}$ ∴ $٥ = \frac{\sum \text{ص}}{٨}$ ∴ $\sum \text{ص} = ٤٠$

١) معامل انحدار ص على س

$$\text{أ} = \frac{\text{ن} \sum \text{س ص} - \sum \text{س} \times \sum \text{ص}}{\text{ن} \sum (\text{س})^{٢} - (\sum \text{س})^{٢}} \quad ∴ \text{أ} = \frac{40\times56-345\times8}{2(56)-524\times8} = \frac{65}{132} = ٠,٤٩٢٤$$

٢) معادلة خط انحدار ص على س هي ص = أ س + ب

∵ أ = ٠,٤٩٢٤

$$∵ \text{ب} = \frac{\sum \text{ص} - \text{أ} \sum \text{س}}{\text{ن}} \quad ∴ \text{ب} = \frac{56\times0.4924-40}{8} = ١,٥٥٣٢$$

∴ ص = ٠,٤٩٢٤ س + ١,٥٥٣٢

ملحوظه يمكن إيجاد قيمة الثابت ب مباشرة من العلاقة : $\text{ب} = \bar{\text{ص}} - \text{أ}\,\bar{\text{س}}$

كما يلي: $\text{ب} = \bar{\text{ص}} - \text{أ}\,\bar{\text{س}}$

= ٥ ـ ٠,٤٩٢٤ × ٧ = ١,٥٥٣٢ ......



١) مصر ٢٠٠٠ إذا كان:

$\sum$ س = ٤١ ، $\sum$ ص = ٥٥ ، $\sum$ س ص = ٣٦٢

$\sum \text{س}^{٢}$ = ٢٥٦ ، $\sum \text{ص}^{٢}$ = ٥٣٢ ، ن = ٨

١) أوجد معادل خط انحدار ص على س

٢) تنبأ بقيمة ص عندما س = ١٠

٢) لدراسة العلاقة بين الدخل (ص) الاستهلاك (س) بمئات الجنيهات شهرياً في إحدى المدن أخذت عينة مكونة من ٤٠ أسرة فأعطن النواتج الآتية:

$\sum$ س = ١٠٠ ، $\sum$ ص = ١٢٠ ، $\sum$ س ص = ٥١٦

$\sum \text{س}^{٢}$ = ٤١٠ ، $\sum \text{ص}^{٢}$ = ٧٢٠

١) أوجد معادلة خط الانحدار. ٢) تنبأ بدخل الأسرة التي يبلغ استهلاكها ٧٠٠ جنيهاً شهرياً

٣) من بيانات الجدول التالي:

س	٢٠	٣٣	٣٠	٤٠	١٣	١٥	٢٦	٢٥
ص	٧	٨	٩	١١	٤	٥	٨	٩

١) تنبأ بقيمة ص عندما س= ٣٥

٢) أوجد مقدار الخطأ في ص إذا كانت س= ٣٠

٤) الجدول الآتي يمثل الدخل الشهري (س) والإنفاق (ص) لمجموعة من الأسر بمئات الجنيهات:

الدخل(س)	٣٨	٢٧	٣٩	٤٠	٥٦	٦٦	٤٢	٤٤
الإنفاق (ص)	١٩	٢٥	٢٠	٢٨	٣١	٣٨	٢٧	٢٢

١) أوجد معامل ارتباط الرتب لبيرسون وحدد نوعه.

٢) أوجد معادلة خط الانحدار.

٣) تنبأ بقيمة الإنفاق (ص) إذا كان الدخل (س) = ٥٠٠٠ جنية.

٤) اوجد مقدار الخطأ فى (ص) إذا كانت س= ٤٠.

٥) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١- إذا كانت معادلة خط الانحدار هي ص = ٢- = ٠,٥٠ س فإن قيمة ص المتوقعة عندما س =٦ هي .....

(٤ ، ٥ ، ٧ ، ٨)

٢- إذا وقعت النقطتان (١١,٥، ١٠) ، (٦,٥، ٥) على خط انحدار ص على س فإن الارتباط بين س ، ص يكون..

(طردياً ، عكسياً ، تاماً ، منعدماً)

٣- إذا كانت جميع النقاط في شكل الانتشار تقع على خط مستقيم ميله سالب فإن معامل الارتباط بين س ، ص يساوى..........

(١ ، صفر ، -٠,٥ ، -١)

٤- إذا كانت معادلة خط الانحدار هي ص = ٣- س فإن نوع الارتباط بين المتغيرين س ، ص يكون..........

(طردياً تاماً ، لا يوجد ارتباط ، منعدماً ، عكسياً تاماً)

٥- يسمى المتغير المطلوب تقديره في معادلة خط الانحدار بالمتغير..........

(المستقل ، التابع ، الطردي ، العكسي)



الباب الثانى الاحتمالات

الاحتمال الشرطي

درسنا العام الماضي حساب الاحتمال وعلمنا أن :

احتمال وقوع أي حدث أ ⊂ ف ويرمز له ل (أ) يعطى بالعلاقة

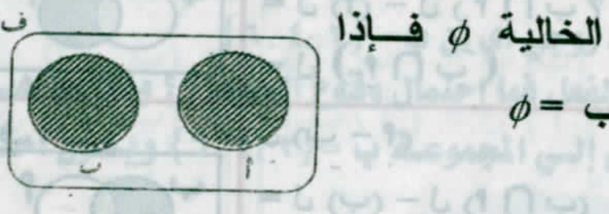
ل (أ) = عدد النواتج التي تؤدي إلي وقوع الحدث أ / عدد جميع النواتج الممكنة

أي أن : ل (أ) = عدد عناصر أ / عدد عناصر ف أو نكتب ل (أ) = ن(أ) / ن(ف)

الأحداث المتنافية : علمت من خلال دراستك للاحتمال بأن الأحداث المتنافية هي الأحداث التي لا يمكن وقوعها في آن واحد لأن وقوع أحدهما يمنع وقوع الأحداث الأخرى.

فمثلاً : في تجربة إلقاء قطعة عملة مرة واحدة فإنه لا يمكن أن نشاهد صورة وكتابة في نفس الوقت ويكون حدث ظهور صورة ينفي حدث أن تكون كتابة

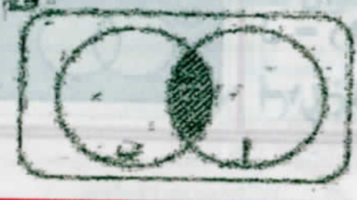
الحدثان المتنافيان : هما الحدثان اللذان لا يشتركان في أي عنصر وتقاطعهما هو المجموعة الخالية ϕ فإذا كان أ ، ب حدثين متنافين فإن أ ∩ ب = ϕ



∴ ل (أ ∩ ب) = صفر

ويكون ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل (ب)

الحدثان غير المتنافيان: هما الحدثان اللذان لا يمنع وقوع أحدهما وقوع الحدث الآخر (توجد عناصر مشتركة بينهما)



تذكر أن

إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية فإن

قوانيـــن الاحتمـــالات

الجدول التالى مُبين احتمال الحدث ورسمه والتعبير عنه بصيغة رياضية ولفظية :

الشكل	التعبير الرياضى	التعبير اللفظى
ف أَ	ل (أَ) = ل (ف − أ) ل (أ) + ل (أَ) = ١ ل (أَ) = ١ − ل (أ) ل (أ) = ١ − ل (أَ)	• احتمال عدم وقوع أ
ف أ ب	ل (أ ∩ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∪ ب)	• احتمال وقوع أ و ب • احتمال وقوع الحدثين معاً • احتمال وقوع كليهما
ف أ ب	ل (أ ∪ ب) = = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب) = ل (أ − ب) + ل (ب − أ) + ل (أ ∩ ب)	• احتمال وقوع أ أو ب • احتمال وقوع أى من الحدثين • احتمال وقوع أحدهما على الأقل • احتمال وقوع الحدث
ف أ ب	ل (أ − ب) = ل (أ) − ل (أ ∩ ب) = ل (أ ∩ بَ)	• احتمال وقوع أ وعدم وقوع ب • احتمال وقوع أ فقط • احتمال وقوع أ دون وقوع ب
ف أ ب	ل (ب − أ) = ل (ب) − ل (أ ∩ ب) = ل (ب ∩ أَ)	• احتمال وقوع ب وعدم وقوع أ • احتمال وقوع ب فقط • احتمال وقوع ب دون وقوع أ
ف أ ب	ل (أَ ∩ بَ) ل = (أ ∪ ب)َ =١ − ل (أ ∪ ب)	• احتمال عدم وقوع أ وعدم وقوع ب • احتمال عدم وقوع أى من الحدثين • احتمال عدم وقوع أحدهما على الأقل

الشكل	التعبير الرياضى	التعبير اللفظى
ف (م ، ب)	ل (مَ ∪ بَ) = ل (م ∩ ب)َ = ١ − ل (م ∩ ب)	• عدم وقوع م أو عدم وقوع ب • عدم وقوع م ، ب معاً • وقوع أحدهما على الأكثر لاحظ عدم وجود كلمة عدم
ف (م ، ب)	ل (م ∪ ب) − ل (م ∩ ب) = ل (م − ب) + ل (ب − م)	• احتمال وقوع م أو ب فقط • احتمال وقوع أحدهما دون الآخر • احتمال وقوع أحدهما فقط
ف (م ، ب)	ل (م ∪ بَ) = ل (مَ ∩ ب)َ = ل (ب − م)َ	• احتمال وقوع م أو عدم وقوع ب • احتمال عدم وقوع ب فقط
ف (م ، ب)	ل (ب ∪ مَ) = ل (بَ ∩ م)َ = ل (م − ب)َ	• احتمال وقوع ب أو عدم وقوع م • احتمال عدم وقوع م فقط

الاحتمال الشرطي : إذا كان أ ، ب حدثين من ف وعلمنا أن الحدث ب قد وقع ففي هذه الحالة قد يكون لوقوع الحدث ب تأثير علي احتمال وقوع الحدث أ ويمكننا حساب احتمال وقوع أ بشرط وقوع الحدث ب

فمثلاً : في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرة أخري فإن فضاء العينة ف = {١، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} فإذا كان أ هو حدث ظهور عدد أقل من ٤

أي أن أ = {١، ٢ ، ٣} وكان ب هو حدث ظهور عدد زوجي أي أن ب= {٢ ،٤ ،٦}

والسؤال هو : إذا علمنا أن الحدث ب قد وقوع بالفعل فما احتمال وقوع الحدث أ ؟ ونلاحظ هنا أن وقوع الحدث ب بالفعل يجعل فضاء العينة يختزل إلي المجموعة ب ={٢ ،٤ ،٦} ويكون احتمال ظهور عدد أقل من ٤ = ل(أ) = $\frac{\text{عدد عناصر أ}}{\text{عدد عناصر ف الجديدة}}$ = $\frac{١}{٣}$ ويمكن صياغة هذا الاحتمال باحتمال مشروط

حيث ظهور عدد أقل من ٤ مشروط بأن يكون زوجي ويمكن صياغة السؤال بصورة جديدة وهي ما احتمال الحصول علي عدد أقل من ٤ بشرط أن يكون زوجي ؟

أي احتمال وقوع الحدث أ بشرط وقوع الحدث ب أولاً ويرمز له بالرمز ل (أ /ب)

ويمكن تعريفه فيما يلي :

الاحتمال الشرطي : إذا كانت ف فضاء العينة لتجربة عشوائية ما كان أ ، ب حدثين من هذا الفضاء فإن احتمال وقوع الحدث أ بشرط وقوع الحدث ب ويرمز له بالرمز ل (أ / ب) ويقرأ احتمال وقوع الحدث أ بشرط وقوع الحدث ب يتحدد بالعلاقة الآتية :

$$ل\,(أ/ب) = \frac{ل\,(أ \cap ب)}{ل\,(ب)}$$ حيث ل (ب) > ٠

ولإيجاد احتمال وقوع الحدث أ بشرط وقوع الحدث ب من المثال التوضيحي لإلقاء حجر نرد نجد أن :

ف = {١، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } وحدث ظهور عدد أقل من ٤ هو أ = {١، ٢ ، ٣} وحدث ظهور عدد زوجي هو ب ={٤،٢ ، ٦ } ونلاحظ أن (أ ∩ ب) = { ٢ }

، $ل\,(أ \cap ب) = \frac{١}{٦}$ ، $ل\,(ب) = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

نوجد الاحتمال المطلوب وهو احتمال وقوع أ بشرط وقوع ب بقانون الاحتمال الشرطي كما يلي

$$ل\,(أ|ب) = \frac{ل\,(أ \cap ب)}{ل\,(ب)} = \frac{١}{٦} \div \frac{١}{٢} = \frac{١}{٣}$$ وهي نفس الإجابة السابقة

ملحوظه

الاحتمال الشرطي يتمتع بنفس خواص الاحتمال (غير الشرطي) أي أن

١) $٠ \leq ل\,(أ/ب) \leq ١$

٢) $ل\,(ف|ب) = \frac{ل\,(ف \cap ب)}{ل\,(ب)} = \frac{ل(ب)}{ل(ب)} = ١$

٣) إذا كان $أ_١ \cap أ_٢ = \phi$ فإن $ل\,[\,(أ_١ \cup أ_٢)/ب\,] = ل\,(أ_١/ب) + ل\,(أ_٢/ب)$

مع ملاحظة أن

١) $ل\,(أ|ب) \neq ل\,(ب/أ)$

٢) $ل\,(أ'|ب) = ١ - ل\,(أ/ب)$

٣) $ل\,(أ \cap ب) = ل\,(أ/ب) \times ل\,(ب)$ بشرط ل (ب) > ٠

٤) $ل\,(أ \cap ب) = ل\,(ب/أ) \times ل\,(أ)$ بشرط ل(أ) > ٠



• أمثلة توضيحية •

مثال

ألقي حجر نرد منتظم مرة واحدة احسب احتمال ظهور العدد ٤ علماً بأن العدد الظاهر زوجي

الحل

بفرض أن فضاء العينة ف = {١، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }

أ = {٤} ب = {٢ ، ٤ ، ٦}

فإن ل(ب) = $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{١}{٢}$ ، ل (أ ∩ ب) = ل (أ) = $\frac{١}{٦}$

∵ ل (أ/ب) = $\frac{ل (أ ∩ ب)}{ل (ب)}$

∴ ل (أ/ب) = $\frac{١}{٦}$ ÷ $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{٦}$ × ٢ = $\frac{١}{٣}$

∴ احتمال ظهور العدد ٤ علماً بأن العدد الظاهر زوجياً هو $\frac{1}{3}$

ملاحظة

في الاحتمال الشرطي لاحظ أن الحدث الذي يلي كلمات " ما احتمال " هو الحدث الذي نبدأ به والحدث الذي يلي احدي الكلمات " علماً بأن أ ، إذا كان أ ، إذا علم أ ، ...... هو الشرط

مثال إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة ف بحيث ل (أ) = ٠,٦ ، ل (ب) = ٠,٤ ، ل (أ/ب) = ٠,٥

١) ل (أ ∩ ب) ٢) ل (أ ∪ب)

٣) ل (ب/ أ) ٤) ل (أَ/ب)

الحل

١) ∵ ل (أ/ب) = $\frac{ل (أ ∩ ب)}{ل (ب)}$ ∴ ٠,٥ = $\frac{ل (أ ∩ ب)}{٠,٤}$

∴ ل (أ ∩ ب) = ٠,٥ × ٠,٤ = ٠,٢

٢) ل (أ ∪ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

∴ ل (أ ∪ب) = ٠,٦ + ٠,٤ − ٠,٢ = ٠,٨

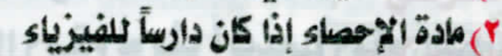
٣) ل (ب/ أ) = $\frac{ل (أ ∩ ب)}{ل (أ)}$ = $\frac{٠,٢}{٠,٦}$ = ٠,٣٣

لاحظ أن ل (أ/ب) ≠ ل (ب / أ)

٤) ل (أَ/ب) = $\frac{ل (أَ ∩ ب)}{ل (ب)}$ = $\frac{ل (ب − أ)}{ل (ب)}$ = $\frac{ل (ب) − ل (أ ∩ ب)}{ل (ب)}$ = $\frac{٠,٤ − ٠,٢}{٠,٤}$ = ٠,٥

حل آخر: ل (أَ/ب) = ١ − ل (أ/ب) = ١ − ٠,٥ = ٠,٥



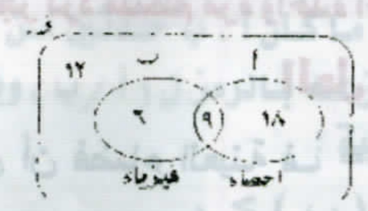


مثال فصل دراسي به ٤٥طالب منهم ٢٧ يدرسون الإحصاء ، ١٥يدرسون الفيزياء، ٩ يدرسون الإحصاء والفيزياء ، اختير طالب من هذا الفصل عشوائياً. أوجد احتمال أن يكون الطالب دارساً

١) أحد المادتين علي الأقل.

٢) مادة الإحصاء إذا كان دارساً للفيزياء

٣) مادة الفيزياء إذا كان دارساً للإحصاء.



الحل

نفرض حدث أن يكون الطالب دارساً للإحصاء هو أ وحدث أن يكون الطالب دارساً للفيزياء هو ب فإن

ل (أ) = $\frac{٢٧}{٤٥}$ = $\frac{٣}{٥}$ ، ل(ب) = $\frac{١٥}{٤٥}$ = $\frac{١}{٣}$ ، ل (أ ∩ ب) = $\frac{٩}{٤٥}$ = $\frac{١}{٥}$

ويمكن توضيح بيانات المسألة علي شكل فن كما بالشكل

١) احتمال أن يكون الطالب دارساً لأحد المادتين علي الأقل هو

ل (أ ∪ب) = ل(أ) + ل(ب) - (أ ∩ ب) = $\frac{٣}{٥}$ + $\frac{١}{٣}$ - $\frac{١}{٥}$ = $\frac{١١}{١٥}$

٢) احتمال أن يكون الطالب دارساً للإحصاء إذا كان دارساً للفيزياء = ل (أ/ ب)

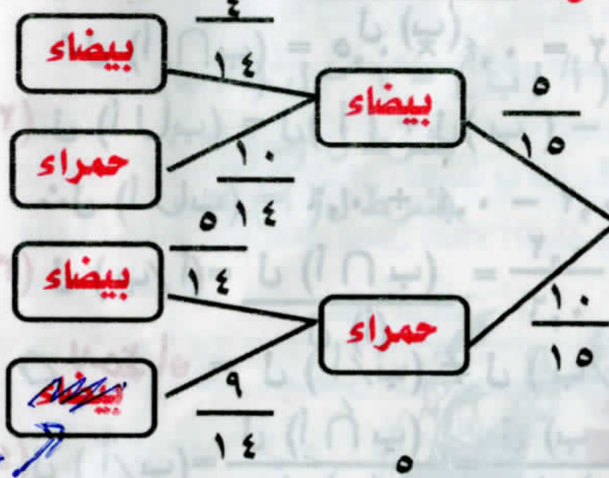
∴ ل (أ/ب) = $\frac{\text{ل (أ ∩ ب)}}{\text{ل (ب)}}$ ∴ ل (أ/ب) = $\frac{١}{٥}$ ÷ $\frac{١}{٣}$ = $\frac{٣}{٥}$

٣) احتمال أن يكون الطالب دارساً للفيزياء إذا كان دارساً للإحصاء = ل (ب/أ)

∴ ل (ب/أ) = $\frac{\text{ل (ب ∩ أ)}}{\text{ل (أ)}}$ ∴ ل (ب/أ)= $\frac{١}{٥}$ ÷ $\frac{٣}{٥}$ = $\frac{١}{٣}$

مثال صندوق به ٥ كرات بيضاء ، ١٠ كرات حمراء سحبت عشوائياً كرتان علي التوالي دون إحلال (إرجاع) ما احتمال أن تكون الكرتان حمراوتان ؟

الحل



نلاحظ في هذا المثال أن سحب الكرات تم علي التوالي أي نسحب واحدة ثم نسحب الأخرى وهذا يخضع للترتيب أي أن السحبة الثانية للكرة مشروط بحدوث السحبة الأولي ويمكن تمثيل ذلك بمخطط الشجرة البيانية كما بالشكل ويكون احتمال السحبة الأولي كما يلي :

احتمال أن تكون بيضاء = $\frac{\text{عدد الكرات البيضاء}}{\text{العدد الكلي للكرات}}$ = $\frac{٥}{١٥}$

احتمال أن تكون حمراء = $\frac{\text{عدد الكرات الحمراء}}{\text{العدد الكلي للكرات}} = \frac{١٠}{١٥}$

وعند سحب كرة في السحبة الأولى يصبح عدد الكرات ١٤ فإن كان السحبة الأولى بيضاء يكون احتمال أن تكون السحبة الثانية بيضاء = $\frac{\text{عدد الكرات البيضاء الجديد}}{\text{عدد الكرات الكلي الجديد}} = \frac{٤}{١٤}$

واحتمال أن يكون السحبة الثانية حمراء = $\frac{\text{عدد الكرات الحمراء كما هي}}{\text{عدد الكرات الكلي الجديد}} = \frac{١٠}{١٤}$

إما إذا كانت السحبة الأولى حمراء يكون احتمال أن تكون السحبة الثانية بيضاء = $\frac{\text{عدد الكرات البيضاء كما هي}}{\text{عدد الكرات الكلي الجديد}} = \frac{٥}{١٤}$

واحتمالأن يكون السحبة الثانية الحمراء = $\frac{\text{عدد الكرات الحمراء كما هي}}{\text{عدد الكرات الكلي الجديد}} = \frac{٩}{١٤}$

وإذا فرضنا أن أ ترمز لحدث أن تكون الكرة بيضاء

ب ترمز لحدث أن تكون الكرة حمراء

فإن احتمال أن تكون الكرتان حمراوتان أي احتمال أن تكون السحبة الثانية حمراء بشرط أن تكون الكرة الأولى حمراء يرمز له ل($ب_٢ / ب_١$) ويرمز لحدث سحب كرتان حمراوتان بالرمز ($ب_٢ / ب_١$)

$\because$ ($ب_٢ / ب_١$) = $\frac{ل\ (ب_٢ \cap ب_١)}{ل\ (ب_١)}$

$\therefore \frac{٩}{١٤} = \frac{ل\ (ب_٢ \cap ب_١)}{\frac{١٠}{١٥}}$

$\therefore$ ل ($ب_٢ \cap ب_١$) = $\frac{٩}{١٤} \times \frac{١٠}{١٥} = \frac{٣}{٧}$

مثال فصل مشترك به ٥٠ طالباً وطالبة وجد به ١٥ ولد يلبسون نظارة و٢٠ ولد لا يلبسون نظارة ،٣بنات تلبسن نظارة ، و١٢ بنت لا تلبسن نظارة فأوجد احتمال أن تكون طالبة اختيرت عشوائياً تلبس نظارة.

الحل

الاحتمال يعني هنا أنه إذا اختير شخصاً ما من الطلاب فما احتمال أن يكون طالب أو احتمال أن تكون طالبة بشرط أن تكون ممن يلبسون نظارة.

النوع	يلبسون	لا يلبسون	المجموع
طالب	١٥	٢٠	٣٥
طالبة	٣	١٢	١٥
المجموع	١٨	٣٢	٥٠

نضع البيانات في جدول كما بالشكل المقابل وبفرض أن أ حدث أن الشخص المختار طالبة، ب حدث أن الشخص المختار يلبس نظارة

فإن ل (ب) = $\frac{١٨}{٥٠}$ ، ل (أ ∩ ب) = $\frac{٣}{٥٠}$

والمطلوب هو احتمال أ بشرط وقوع ب أي ل (أ/ب)

∵ ل (أ/ب) = $\frac{ل (أ ∩ ب)}{ل (ب)}$ ∴ ل (أ/ب) = $\frac{٣}{٥٠} \div \frac{١٨}{٥٠} = \frac{١}{٦}$

تدريبات ١

١) أكمل ما يأتي

١) إذا كان أ ، ب حدثين وكان ل (أ ∩ ب) = ٠,٢ ، ل(ب) = ٠,٤ فإن ل (أ/ب) = ...

٢) إذا كان أ ، ب حدثين وكان ل (أ ∩ ب) = $\frac{٣}{٨}$ ، ل (أ´) = $\frac{١}{٤}$ فإن ل (ب/ أ) = ...

٣) إذا كان ل(أ) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (أ − ب)= $\frac{٣}{٨}$ فإن ل (ب´/ أ) = ...

٤) إذا كان ل (أ´) = $\frac{٢}{٥}$ ، ل (ب/ أ) = $\frac{١}{٢}$ فإن ل (أ ∩ ب) = ...

٥) إذا كان ل (أ − ب) = ٠,٤ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,١ فإن ل (ب´/أ) = ...

٦) إذا كان ل (ب) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (أ ∪ ب) = $\frac{٥}{٦}$ فإن فإن ل (أ/ ب´) = ...

٢) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة ف وكان ل (أ) = ٠,٣ ، ل (ب) = ٠,٥ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,١٢ فأوجد :

١) ل (أ/ب) ٢) ل (ب /أ) ٣) ل (أ /ب)

٣) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة ف وكان ل (أ) = $\frac{١}{٢}$ ، ل(ب) = ٠,٥ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,١٢

١) ل (أ/ب) ٢) ل (ب/ أ´) ٣) ل (أ/ب)

٤) إذا كان أ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة ف وكان ل(أ) = ٠,٤٥، ل(ب)=٠,٦، ل (ب / أ) =٠,٨

١) ل (أ ∩ ب) ٢) ل (أ ∪ ب) ٣) ل (أ/ب) ٤) ل (بَ/ أ)

٥) كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة ف، وكان ل (أ) = ٠,٧ ، ل(ب) = ٠,٢٥ ل(أ ـ ب) = ٠,٤٥

١) ل (أ/ب) ٢) ل (ب/ أ) ٣) ل (أَ/ب) ٤) ل (أَ/بَ)

٦) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية ف حيث ل(أ)= ٠,٧، ل(ب)=٠,٤،

ل (أ ∩ ب) = ٠,٢

١) مثل المجموعات السابقة بشكل فن واكتب علي الرسم احتمالات وقوعها
٢) أوجد احتمالات الأحداث الآتية
أ) وقوع الحدث أ بشرط عدم وقوع الحدث ب
ب) وقوع الحدث ب بشرط عدم وقوع الحدث أ

٧) يحتوي كيس علي ٢٦ بطاقة منها ١٠ بطاقات حمراء ، ١٦ بطاقة خضراء سحبت بطاقتان عشوائياً الواحدة تلو الأخرى دون إحلال (إرجاع) احتمال أن تكون:
١) الكرتان حمراوين ٢) الكرة الأولي حمراء والثانية خضراء
٣) الكرة الأولي خضراء والثانية حمراء.

٨) يصوب لاعبان أ ، ب في وقت واحد نحو هدف ما ، فإذا كان احتمال أن يصيب اللاعب أ الهدف = $\frac{٢}{٥}$ واحتمال أن يصيب اللاعب ب الهدف = $\frac{١}{}$ واحتمال أن يصيب اللاعبان أ، ب معاً الهدف = $\frac{١}{٦}$
أوجد احتمال ١) إصابة الهدف ٢) إصابة الهدف من اللاعب أ إذا تم إصابته من اللاعب ب
٣) إصابة الهدف من اللاعب ب إذا تم إصابته من اللاعب أ

٩) ألقي حجر نرد منتظم مرتين متتاليين احتمال ألا يزيد عدد النقاط في الرمية الأولي عن ٤ إذا علمت أن الفرق المطلق بين العددين الظاهرين يساوي ٢ ؟

١٠) في تجربة إلقاء حجر نرد متمايزين مرة واحدة أوجد احتمال أن يكون :
١) العدد الظاهر علي الحجر الثاني يساوي ٤ علماً بأن العدد الظاهر علي الحجر الأول يساوي ٢
٢) مجموع العددين الظاهرين زوجياً علماً بأن العدد الظاهر علي الحجر الأول يساوي٦

١١) ألقي حجرا نرد متمايزان مرة واحدة أوجد احتمال كل من الأحداث الآتية:
١) ظهور العدد علي الوجهين معاً علماً بأن العدد نفسه ظهر علي أحداهما
٢) ظهور العدد ٥ علي الوجهين علماً بأن العددين الظاهرين كل منها يزيد عن ٤
٣) عدم ظهور العدد ٣ علي أي من الوجهين علماً بأن العددين الظاهرين فرديان.

الحدثان أ ، ب يكونان مستقلين إذا كان احتمال حدوث أحدهما لا يؤثر في احتمال حدوث الآخر.

الاحداث المستقلة

تعريف : يقال أن الحدثين أ ، ب مستقلان إذا وإذا فقط ل (أ ∩ ب)= ل (أ) × ل (ب)

ونلاحظ أن

إذا كان الحدثان أ ، ب مستقلين وكان ل (ب) ≠ صفر فإن ل (أ / ب)= ل (أ)

أي أن وقوع أحد الحدثين لا يؤثر في احتمال وقوع الحدث الآخر.

فمثلاً ألقيت قطعة نقود منتظمة مرتين ولوحظ تتابع حدوث الصورة والكتابة فإن ف = {(ص ، ص)،(ص ، ك)،(ك ، ص)،(ك ، ك)} لذا فإن احتمال أي من تلك النتائج = $\frac{1}{4}$

بفرض أن الحدث أ يمثل ظهور الكتابة في المرة الثانية = { (ص، ك)، (ك ،ك) }

والحدث ب يمثل ظهور الصورة في المرة الأولي ={ (ص ، ص) ،(ص ، ك) }

فإن ل (أ / ب) = $\frac{ل (أ ∩ ب)}{ل (ب)}$ = $\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}$ = $\frac{1}{2}$ = ل (أ)

أي أن حدوث الحدث ب لم يؤثر علي احتمال حدوث الحدث أ بمعني أن احتمال أ لا يعتمد علي معلومية أن الحدث ب قد وقع لذا نقول أن الحدثين أ ، ب مستقلات.

الحدثان المتنافيين والحدثان المستقلين

الحدثان المتنافيين أ ، ب يكونان مستقلين إذا وإذا فقط ل (أ) × ل (ب) = صفر بمعني إذا وإذا فقط كان احتمال أ أو احتمال ب مساوياً صفر أي أنه يمكن أن يكون الحدثان متنافيين ولكنهما غير مستقلين حاصل الضرب ≠ صفر

• **ولإيضاح الفرق بين الحدثان المتنافيين والمستقلين نأخذ المثال التالي:**

نعلم أنه عند إلقاء قطعة نقود معدنية منتظمة مرة واحدة فإن فضاء العينة ف = { ص ، ك }

كما نعلم أن ل(ص) = $\frac{1}{2}$ ، ل (ك) = $\frac{1}{2}$

ونعلم أيضاً أن الحدثين ص ، ك حدثان متنافيان لأن حدوث أحدهما ينفي حدوث الآخر

∴ ل (ص ∩ ك) = صفر ∴ ل (ص ∩ ك) ≠ ل (ص) × ل (ك)

أي أنه ص ، ك حدثان متنافيان إلا أنهما غير مستقلين

صفر ≠ $\frac{1}{2}$ × $\frac{1}{2}$ =



الاحداث غير المستقلة

يكون أ ، ب حدثان غير مستقلين إذا كان ل (أ $\cap$ ب) $\neq$ ل (أ) × ل (ب)

لأننا نعلم من تعريف الاحتمال الشرطي أن

ل (أ / ب) = $\frac{\text{ل (أ} \cap \text{ب)}}{\text{ل (ب)}}$ بشرط ل (ب) $\neq$ ٠

ل (ب / أ) = $\frac{\text{ل (أ} \cap \text{ب)}}{\text{ل (أ)}}$ بشرط ل (أ) $\neq$ ٠

أي أنه يمكن كتابة ل (أ $\cap$ ب)= ل (أ / ب) × ل (ب)

= ل (ب / أ) × ل (أ) بشرط أن ل (أ) $\neq$ل (ب) $\neq$ ٠

مثال في تجربة إلقاء نقود منتظمة مرتين متتاليتين ولوحظ تتابع ظهور الصورة والكتابة أوجد احتمال ظهور كتابة في المرة الأولي وصورة في المرة الثانية.

الحل

ف = { (ص ، ص) ، (ص، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك) }

عدد عناصر فضاء العينة = ٤

بفرض أن أ هو حدث ظهور كتابة في المرة الأولي = { (ك،ص) ، (ك،ك) }

وأن ب هو حدث ظهور صورة في المرة الثانية = { (ك،ص) ، (ص،ص) }

حدث ظهور كتابة في المرة الأولي وصورة في المرة الثانية هو :

(أ $\cap$ ب) = { (ك،ص) }

وعدد عناصر أ $\cap$ ب = ١ $\therefore$ ل (ب) = $\frac{٢}{٤}$ = $\frac{١}{٢}$

$\because$ ل(أ $\cap$ ب) = ل(أ) × ل(ب)

$\therefore$ ل(أ $\cap$ ب) = $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{٤}$ وهي نفس النتيجة السابقة

مثال في تجربة إلقاء قطعة نقود مرة واحدة ثم إلقاء حجر نرد احتمال ظهور صورة والعدد ٤

الحل

يمكن استخدام الشجرة البيانية لكتابة فضاء العينة نلاحظ إلقاء قطعة النقود لا يؤثر في نواتج العينة لإلقاء حجر النرد لذلك فإن الحدثين مستقلان وبفرض أن :



أ- حدث ظهور صورة فإن ل(أ) = $\frac{١}{٢}$

ب- حدث ظهور العدد ٤ فإن ل (ب) = $\frac{١}{٦}$

∵ ل(أ ∩ ب) = ل(أ) × ل(ب) ∴ ل(أ ∩ ب) = $\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٦} = \frac{١}{١٢}$

∴ احتمال ظهور صورة والعدد ٤ هو $\frac{١}{١٢}$

ملاحظة

يمكن إيجاد احتمال ظهور صورة والعدد ٤ مباشرة بكتابة فضاء العينة كما هو موضح بالشكل التالي

ف= { (ص،١) ، (ص،٢) ، (ص،٣) ، (ص،٤) ، (ص،٥) ،(ص،٦) ، (ك،١) ، (ك،٢) ، (ك،٣) ، (ك،٤) ، (ك،٥) ، (ك،٦) }

حدث ظهور صورة والعدد ٤ = { (ص ، ٤) }

ويكون احتمال ظهور صورة والعدد ٤ = $\frac{١}{١٢}$

مثال إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية ف وكان ل(أ) =٠,٤ ، ل(ب) =٠,٥

ل(أ) = ٠,٤ ل(ب) = ٠,٥ ل (أ ∪ ب) = ٠,٧

بين مع ذكر السبب ل أ ، ب حدثان مستقلان

الحل

∵ ل(أ ∩ ب) = ل(أ) + ل(ب) – ل (أ ∪ ب)

∴ ل(أ ∩ ب) = ٠,٤ + ٠,٥ – ٠,٧ = ٠,٢ ∵ل(أ) × ل(ب) = ٠,٤ × ٠,٥= ٠,٢

∴ ل(أ ∩ ب) = ل(أ) × ل(ب) ∴ أ ، ب حدثين مستقلين

مثال إذا كان ف فضاء العينة لتجربة عشوائية حيث ف= { ١، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ }
وكان أ = { ١، ٢ ، ٣ ، ٤ } ، ب = { ٤ ، ٦ ، ٧ ، ٨ } أ ، ب حدثان مستقلان ؟

الحل

∵ عناصر ف = ٨ ، عدد عناصر أ = ٤ ، عدد عناصر ب = ٤

∴ ل(أ) = $\frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$ ، ل(ب) = $\frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$

∵ ل(أ ∩ ب) = { ٤ }   ∴ ل(أ ∩ ب) = $\frac{١}{٨}$ (١)

∵ ل(أ) × ل (ب) = $\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٤}$ (٢)

من (١) ، (٢) نلاحظ أن : ل(أ ∩ ب) ≠ ل (أ) × ل (ب)

∴ أ ، حدثين غير مستقلين

مثال إذا كان أ ، ب حدثين مستقلين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان ل (أ) = ٠,٦ ، ل(ب) = ٠,٣

أوجد كلاً من : ١) ل (أ ∩ ب)   ٢) ل (أ ∪ ب)   ٣) ل (أ − ب)

الحل

∵ أ ، ب حدثين مستقلين

١) ∴ ل(أ ∩ ب) = ل (أ) × ل (ب)

ل(أ ∩ ب) = ٠,٦ × ٠,٣ = ٠,١٨

٢) ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

= ٠,٦ + ٠,٣ − ٠,١٨ = ٠,٧٢

٣) ل (أ − ب) = ل (أ) − ل(أ ∩ ب) = ٠,٦ − ٠,١٨ = ٠,٤٢

مثال إذا كان أ ، ب حدثين مستقلين وكان ل(أ) = ٠,٣، ل (ب) = س ، ل (أ ∪ ب) = ٠,٧٢ أوجد قيمة س

الحل

∵ ل(أ ∪ ب) = ل(أ) × ل(ب)

∴ ل(أ ∩ ب) = ٠,٣ × س

∴ ل(أ ∩ ب) = ل(أ) + ل (ب) − ل (أ ∪ ب)

∴ ل(أ ∩ ب) = ٠,٣ + س − ٠,٧٢   من (١) ، (٢)

∴ ٠,٣ س = ٠,٣ + س − ٠,٧٢   ∴ ٠,٣ س = س − ٠,٤٢   ∴ ٠,٤٢ = س − ٠,٣ س

∴ ٠,٤٢ = س (١ − ٠,٣)   ∴ ٠,٤٢ = س(٠,٧)   ∴ س = $\frac{٠,٤٢}{٠,٧}$ = ٠,٦



١) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه :

ا) إذا كان أ ، ب حدثين مستقلين وكان ل(أ) = ٢,، ل(ب) = ٥, فإن ل(أ ∩ ب) = ...
(٧,، ٤,، ٣,، ١,)

ب) إذا كان أ ، ب حدثين مستقلين وكان ل(أ) = ٢,، ل(ب) = ٦, فإن ل (أ ∪ ب) = ...
(١٢,، ٣٢,، ٦٨,، ٨,)

جـ) إذا كان أ ، ب حدثين مستقلين وكان ل(أ) = ٢٥,، ل(ب) = ٤,٠ فإن ل(أ - ب) = ...
(١,، ١٥,، ٣,، ٦٥,)

٢) ألقيت قطعة نقود ثم ألقي حجر نرد مرة واحدة فأوجد :

١) احتمال ظهور العدد ٣ ؟ ٢) احتمال ظهور كتابة وعدد أولي ؟

٣) إذا لقيت قطعة نقود أربع مرات متتالية فما احتمال الحصول علي كتابة أربع مرات؟

٤) ألقي حجر نرد منتظم واحدة فإذا كان أ حدث ظهور عدد زوجي ب حدث ظهور عدد مربع ، هل أ ،ب حدثان مستقلان ؟ فسر إجابتك ؟

٥) إذا كان ف فضاء العينة لتجربة عشوائية حيث ف= { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ } وكان أ = { ١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ } ، ب= { ٢ ، ٥ ، ٦ ، ٨ } هل أ ، ب حدثان مستقلان ؟ فسر إجابتك.

٦) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ف وكان ل(أ)=٥,، ل(ب)= ٦,، ل (أ ∪ ب)=٨, بين مع ذكر السبب هل أ ، ب حدثان مستقلان ؟

٧) إذا كان احتمال ارتفاع مؤشر سوق الأسهم في الدولة (أ) يساوي ٨٤, واحتمال ارتفاع مؤشر سوق الأسهم في الدولة (ب) يساوي ٧٥, ما احتمال أن يرتفع مؤشر سوقي أسهم الدولتين أ ، ب ؟

٨) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان ل(ب) = ٣,،

ل (أ ∪ ب) =٥, أوجد قيمة ل(أ) إذا كان أ ، ب

١) حدثين متنافيين ٢) حدثين مستقلين

٩) يحتوي كيس علي مجموعة من البلي موزعة علي النحو التالي ٢حمراء ، ٣خضراء ، وواحدة زرقاء اختيرت عشوائياً بلية واحدة مع الإحلال ثم اختيرت بلية ثانية أوجد احتمال أن تكون البليتان المختاران خضراوتين ؟

١٠) كيس يحتوي علي ٦ كرات زرقاء و٤كرات حمراء إذا سحبت كرة عشوائياً ثم أعيدت إلي الكيس ثم سحبت كرة ثانية ما احتمال أن تكون :

١) الكرتان حمراوين في المرتين ؟

٢) الكرتان زرقاوين في المرتين ؟

٣) الكرة الأولي حمراء والثانية زرقاء ؟

٤) أحداهما حمراء والأخرى زرقاء؟





الباب الثالث دالة التوزيع الاحتمالى

المتغير الشرطي المتقطع

المتغير العشوائي المتقطع:
المتغير العشوائي المتقطع (المنفصل أو الثابت) مداه مجموعة محدودة (منتهية) أى قابلة للحصر من الأعداد الحقيقية.

التوزيعات الاحتمالية

نعرف دالة التوزيعات الاحتمالية المتقطعة كالتالي:

تعريف

إذا كان س~ متغيراً عشوائياً متقطعاً مداه المجموعة {س١ ، س٢ ، س٣ ، .....،س ر}

فإن الدالة د المعرفة كالآتي ": د(س ر)= ل (س = س ر) لكل ر = ١، ٢، ٣، ....

تحدد ما يسمى بدالة التوزيعات الاحتمالية المتقطعة للمتغير العشوائي س~ والذي يعبر عنه بمجموعة من الأزواج المرتبة المجددة لبيان الدالة د.

فمثلا: يمكن إيجاد دالة التوزيع الاحتمالي لتجربة إلقاء قطعة نقى مرتين متتاليتين للمتغير العشوائي س~ الذي يعبر عن عدة مرات ظهور الصورة كما يلي:

ف= { (ص،ص)، (ص، ك) ، (ك،ص) ، (ك، ك) }

نجد من الشكل الجانبي أن مدى المتغير العشوائي الذى يعبر عن عدد ظهور صورة = { ٠، ١، ٢} ثم نوجد احتمال كل عنصر من عناصر المدى حيث

د (٠) = ل(س=٠) = $\frac{ن(س~_١)}{ن(ف)}$ = $\frac{1}{4}$

د(١) =ل (س= ١) = $\frac{ن(س~_٢)}{ن(ف)}$ = $\frac{2}{4}$

د(٢) = ل (س = ٢) = $\frac{ن(س~_٣)}{ن(ف)}$ = $\frac{1}{4}$

(ص،ص)	→ ٢
(ص، ك)	→ ١
(ك، ص)	→ ١
(ك، ك)	→ ٠

٤ ، ٣ ، ٢ ، ١ ، ٠

وتكون دالة التوزيع الاحتمالي هي:

$س_ر$	٠	١	٢
$د(س_ر)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

التوقع (المتوسط)

١) **التوقع** $(\mu) = \sum_{ر=1}^{ن} س_ر \cdot د(س_ر)$

أي أن التوقع (μ) = $س_١ \times د(س_١) + س_٢ \times د(س_٢) + ... + س_ن \times د(س_ن)$

التباين

٢) **التباين** $(\sigma^2) = \sum_{ر=1}^{ن} س^2_ر \cdot د(س_ر) - \mu^2$

الانحراف المعياري

أي أن ٣) الانحراف المعياري $(\sigma) = \sqrt{\text{التباين } (\sigma^2)}$

٤) معامل الاختلاف = $\left(\frac{\text{الانحراف المتوسط}}{\text{المتوسط}} \times ١٠٠\right) = \left(\frac{\sigma}{\mu} \times ١٠٠\right)\%$

مثال إذا كانت س متغيراً عشوائياً متقطعاً توزيعه الاحتمالي كالآتي:

$س_ر$	٣-	٠	٣	٦
$د(س_ر)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

فأوجد ١) **المتوسط**
٢) **التباين**
٣) **الانحراف المعياري**

الحل: من جدول التوزيع الاحتمالي نكون الجدول الآتي:

$س_ر$	$د(س_ر)$	$س_ر . د(س_ر)$	$س^2_ر . د(س_ر)$
٣-	$\frac{2}{6}$	١-	٣
٠	$\frac{1}{6}$	٠	٠
٣	$\frac{2}{6}$	١	٣
٦	$\frac{1}{6}$	١	٦
$\sum$	١	١	١٢

المتوسط (μ) = ١ [مجموع العمود الثالث]

التباين (σ^2) = ١٢ − (١)^2 = ١١

[مجموع العمود الرابع − (مجموع العمود الثالث)^2]

الانحراف المعياري (σ) = $\sqrt{11}$ = ٣,٣١٧

مثال إذا كان س متغيراً عشوائياً متقطعاً وتوزيعه الاحتمالي كالآتي:

$س_ر$	١	٢	٣	٤
$د(س_ر)$	٠,٢	أ	٠,٤	٠,١

١) أوجد قيمة أ ٢) أحسب كل من المتوسط والانحراف المعياري للمتغير س.

∵ مجموع الاحتمالات [$\sum$ د (س ر)] = ١

∴ ل (١)+ ل (٢)+ ل (٣) +ل (٤) = ١

∴ ٠,٢+ أ +٠,٤+ ٠,١ = ١ ∴ أ+ ٠,٧ = ١ ∴ أ= ١- ٠,٧

∴ أ = ٠,٣

٢)

$س_ر$	$د(س_ر)$	$س_ر . د(س_ر)$	$س^2_ر . د(س_ر)$
١	٠,٢	٠,٢	٠,٢
٢	٠,٣	٠,٦	١,٢
٣	٠,٤	١,٢	٣,٦
٤	٠,١	٠,٤	١,٦
$\sum$	١	٢,٤	٦,٦

∴ المتوسط (μ) = ٢,٤ التباين (σ^2) = ٦,٦ − (٢,٤)^2 = ٠,٨٤

الانحراف المعياري(σ)= $\sqrt{٠,٨٤}$ ≃ ٠,٩١٧



مثال إذا كان س~ متغيراً عشوائياً متقطعاً متوسطه μ = ٣ وتوزيعه الاحتمالي كالآتي:

س ر	٠	ك	٣	٤
د(س ر)	أ	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	٥أ

١) أوجد قيمتي (أ،ك) ٢) أوجد الانحراف المعياري للمتغير س~

الحل:

∵ مجموع الاحتمالات = ١

∴ أ + $\frac{1}{6}$ + $\frac{1}{3}$ + ٥أ = ١ ∴ ٦أ + $\frac{1}{2}$ = ١

∴ ٦أ = ١ − $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{2}$ ∴ أ = $\frac{1}{2}$ × $\frac{1}{6}$ ∴ أ = $\frac{1}{12}$

٢)

س ر	د(س ر)	س ر د(س ر)	س ر^٢ د(س ر)
٠	$\frac{1}{12}$	٠	٠
ك	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$ك	$\frac{1}{6}$ك^٢
٣	$\frac{1}{3}$	١	٣
٤	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{20}{3}$
Σ	١	٣	

∵ المتوسط μ = ٣ ∴ $\frac{1}{6}$ك + ١ + $\frac{5}{3}$ = ٣ ∴ $\frac{1}{6}$ك + $\frac{8}{3}$ = ٣

∴ $\frac{1}{6}$ك = ٣ − $\frac{8}{3}$ ∴ $\frac{1}{6}$ك = $\frac{1}{3}$ ∴ ك = $\frac{1}{3}$ × $\frac{6}{1}$ ∴ ك = ٢

وبالتعويض عن قيمة ك فى العمود الرابع فيكون مجموع العمود الرابع ١٠ $\frac{1}{3}$

∴ التباين (σ^2) = ١٠ $\frac{1}{3}$ − (٣)^٢ = ١ $\frac{1}{3}$

∴ الانحراف المعياري σ = $\sqrt{\sigma^2}$ ≃ ١,١٥

مثال إذا كانت س متغيراً عشوائياً مداه = { ٠، ١، ٢، ٣ } وكان ل (س=٠) = ل (س=١) = $\frac{1}{9}$

، ل (س=٣) = $\frac{1}{3}$

فأوجد: ١) التوزيع الاحتمالي للمتغير س ٢) المتوسط ومعامل الاختلاف للمتغير س

∵ مجموع الاحتمالات = ١.

∴ ل(س=٠) + ل(س=١) + ل (س=٢) + ل(س=٣) = ١

∴ $\frac{1}{9}$ + $\frac{1}{9}$ + ل (س=٢) + $\frac{1}{3}$ = ١

∴ ل(س=٢) = ١ − ($\frac{1}{9}$ + $\frac{1}{9}$ +) = $\frac{4}{9}$

∴ التوزيع الاحتمالي للمتغير س هو:

س ر	٠	١	٢	٣
د(س ر)	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{3}$

٢) من جدول التوزيع الاحتمالي نكون الجدول الآتي:

س ر	د(س ر)	س ر . د(س ر)	س ر² . د(س ر)
٠	$\frac{1}{9}$	٠	٠
١	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
٢	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{16}{9}$
٣	$\frac{1}{3}$	١	٣
Σ	١	٢	$\frac{44}{9}$

∴ المتوسط (μ) = ٢. التباين (σ^2) = $\frac{44}{9}$ − (٢)² = $\frac{8}{9}$

الانحراف المعياري σ = $\sqrt{\frac{8}{9}}$ ≃ ٠,٩٤٣

∴ معامل الاختلاف = ($\frac{\sigma}{\mu}$ × ١٠٠)٪ = ($\frac{0.943}{2}$ × ١٠٠) ٪ = ٤٧,١٥٪.



مثال

إذا كان س~ متغيراً عشوائياً متقطعاً توزيعه الاحتمالي يحدد بالدالة د(س) = $\frac{أ+س}{١٨}$ حيث س = ١، ٢، ٣، ٤

فأوجد ١) قيمة أ. ٢) المتوسط والانحراف المعياري للمتغير س~

الحل

١) ∵ د(١) + د(٢) + د(٣) + د(٤) = ١

∴ $\frac{أ+١}{١٨} + \frac{أ+٢}{١٨} + \frac{أ+٣}{١٨} + \frac{أ+٤}{١٨} = ١$

∴ $\frac{أ+١+أ+٢+أ+٣+أ+٤}{١٨} = ١$

∴ $\frac{٤أ+١٠}{١٨} = ١$ ∴ ٤أ + ١٠ = ١٨ ∴ ٤أ = ١٨ − ١٠

∴ ٤أ = ٨ ∴ **أ = ٢**

٢) بالتعويض عن قيم س فى الدالة:

∴ د(١) = $\frac{1}{6}$ ∴ د(٢) = $\frac{2}{9}$ ∴ د(٣) = $\frac{5}{18}$ ∴ د(٤) = $\frac{1}{3}$

$س_ر$	$د(س_ر)$	$س_ر . د(س_ر)$	$س_ر^2 . د(س_ر)$
١	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
٢	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{9}$
٣	$\frac{5}{18}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{2}$
٤	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{16}{3}$
Σ	١	$\frac{25}{9}$	$\frac{80}{9}$



∴ المتوسط $(\mu) = \frac{25}{9}$

التباين $(\sigma^2) = \frac{80}{9} - (\frac{25}{9})^2 = \frac{95}{81}$

الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{\frac{95}{81}} \simeq 1.083$

مثال متغير عشوائي متقطع متوسطه=٦ ومعامل الاختلاف له ٥٠٪ أوجد تباينه.

الحل:

∵ معامل الاختلاف = $\frac{\sigma}{\mu} \times 100\%$

∴ $50\% = \frac{\sigma}{6} \times 100\%$ ∴ $6 \times 50 = \sigma \times 100$

∴ $\sigma = \frac{50 \times 6}{100}$ ∴ $\sigma = \frac{300}{100} = 3$

∴ التباين $(\sigma^2) = 3^2 = 9$ ∴ $\sigma^2 = 9$

مثال إذا كان التباين لمتغير عشوائي يساوي ٢,٢٥، ومعامل الاختلاف له= ٣٠٪ . احسب المتوسط لهذا التغير.

الحل:

الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{\text{التباين}} = \sqrt{2.25} = 1.5$

∵ معامل الاختلاف= $\frac{\sigma}{\mu} \times 100\%$

$30\% = \frac{1.5 \times 100}{\mu}\%$

∴ $30\mu = 150$ ∴ $\mu = \frac{150}{30}$ ∴ $\mu = 5$



تدريبات ١

١) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١- إذا كان س متغيراً عشوائياً مداه { ١، ٢، ٣ } وكان ل (س=١) =٠,٣، ل= (س=٢)=٠,٥ فإن ل(س=٣) تساوي......... (٠,١ أ، ٠,٢ أ، ٠,٧ أ، ٠,٨)

٢-إذا كان س متغيراً عشوائياً متقطعاً مداه {٠، ١، ٢ } ودالة توزيعه الاحتمالي تحدد بالعلاقة د(س) = $\frac{أ س}{٦}$ فإن قيمة أ يساوي.............. ($\frac{1}{2}$ أ، ١ أ، $\frac{3}{2}$ أ، ٢)

٣-إذا كان س متغيراً عشوائياً متقطعاً وكان التوقع يساوى ٠,٦، $\sum_{ر=}^{ن}$ س$^{٢}_{ر}$ × د(س ر)= ٤,٣٦ فإن الانحراف المعياري له يساوي............ (١,٩٤ أ، ٢ أ، ٣,٧٦ أ، ٤)

٢) في تجربة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية إذا كان المتغير العشوائي س يعبر عن (عدد الصور الظاهرة علي الوجه العلوي)

١) اكتب المدى ٢) التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س.

٣) مصر ١٩٩٣ إذا كان س متغيراً عشوائياً متقطعاً وتوزيعه الاحتمالي كالآتي:

س ر	١	٢	٤	٦
د(س ر)	٠,٢	٠,٣	أ	٠,١

فأوجد قيمة أ ثم احسب قيمة كل من المتوسط والانحراف المعياري للمتغير س.

٤) مصر ١٩٩٩ إذا كان س متغيراً عشوائياً متقطعاً وتوزيعه الاحتمالي كالآتي:

س ر	ـ٢	ـ١	١	٣
د(س ر)	٠,١٥	٠,٢٥	٠,٢٥	٥ك

١) احسب قيمة ك. ٢) اوجد التوقع μ ومعامل الاختلاف للمتغير العشوائي س.

٥) مصر٢٠٠٣ إذا كان س متغيراً عشوائياً متقطعاً وتوزيعه الاحتمالي مبين بالجدول الآتي:

س ر	ـ٣	صفر	٣	٦
د(س ر)	ك	ك^{٢}	٢ك^{٢}	ك

فأوجد: ١) قيمة ك. ٢) التوزيع الاحتمالي للمتغير س. ٣) المتوسط والتباين للمتغير س.

٦) مصر١٩٩٧ إذا كان س متغيراً عشوائياً متقطعاً ومتوسطه μ =٢ وتوزيعه الاحتمالي كالآتي:

سر	٠	٢	ك	٤
د(سر)	م	٢م	$\frac{1}{3}$	٥م

١)فاحسب قيمتي م، ك. ٢) أوجد الانحراف المعياري للمتغير س.

٧) مصر١٩٩٦ س متغير عشوائي متقطع توزيعه الاحتمالي يحدد بالدالة :د(س) = $\frac{أس}{9}$ حيث س=١، ٢، ٣ أوجد:

١)قيمة أ. ٢) التباين ومعامل الاختلاف للمتغير العشوائي س.

دالــة كثافة الاحتمــال المتغير العشوائي المتصل

المتغير العشوائي المتصل(المستمر):

هو المتغير العشوائي الذي مداه فترة من الأعداد الحقيقية(مفتوحة أو مغلقة) وهى مجموعة غير قابلة للحصر من الأعداد الحقيقية.

دالة الكثافة:

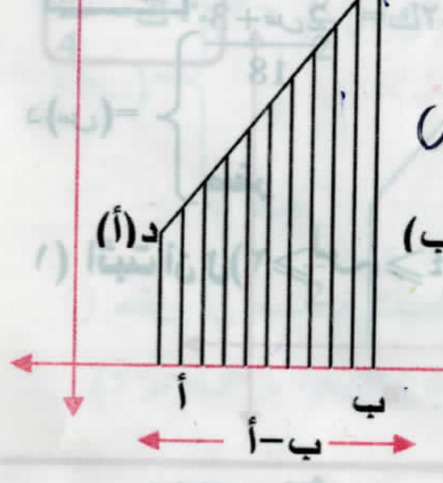
إذا كان س متغيراً عشوائياً متصلاً فإن الدالة الحقيقية د تسمى بدالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي س إذا كان: ل(أ≤س≤ب) = مساحة المنطقة الواقعة تحت منحني الدالة وفوق محور السينات فى الفترة من أ إلى ب وذلك لكل عددين حقيقيين أ، ب حيث أ≤ب.

خواص دالة الكثافة

١) منحنى الدالة متصل ويقع فوق محور السينات.

٢) د(س) ≥٠ لجميع قيم س التي تنتمي لمجال الدالة.

٣) مساحة المنطقة الواقعة تحت منحوني الدالة د وفوق محور السينات على الفترة [أ،ب] تساوي الواحد الصحيح.



ملاحظة هامة

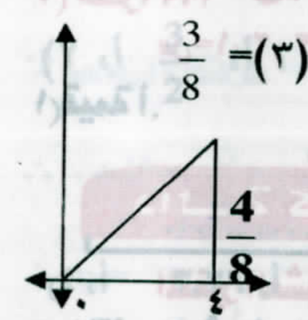
إذا كانت د دالة تمثل بيانياً بقطعة مستقيمة تقع أعلي محور السينات فإن المساحة تحت منحنى الدالة وفوق الفترة [أ،ب]= $\frac{1}{2}$ ×[(أ)+د(ب)] ×(ب-أ)

مثال إذا كان س~ متغيراً عشوائياً متصلاً دالة كثافة الاحتمال له هي

د(س)= { $\frac{1}{8}$س عندما ٠ ≤ س ≤ ٤
صفر فيما عدا ذلك.

فأوجد ١) ل(١≤س≤٤) ٢)ل (٢<س<٣) ٣) ل(٣<س≤٥)

الحل:



د(٠)= $\frac{1}{8}$×٠=٠ ، د(٤)= $\frac{4}{8}$ ، د(١)= $\frac{1}{8}$ ، د(٢)= $\frac{2}{8}$ ، د(٣)= $\frac{3}{8}$

١) ل (١≤س~≤٤)= $\frac{1}{2}$[د(١)+د(٤)] × (٤−١)

= $\frac{1}{2}$[$\frac{1}{8}$+$\frac{4}{8}$] ×٣= $\boxed{\frac{15}{16}}$

٢) ل(٢<س~<٣)= $\frac{1}{2}$[د(٢)+د(٣)] ×(٣−٢)

= $\frac{1}{2}$[$\frac{2}{8}$+$\frac{3}{8}$]×١= $\boxed{\frac{5}{16}}$

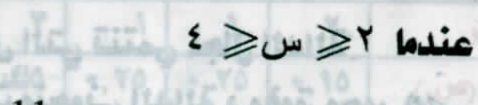
٣) ل(٣<س~≤٥)= ل(٣<س~≤٤)+ ل(٤ ≤س~≤ ٥)

= $\frac{1}{2}$[د(٣)+د(٤)]× (٤−٣)+صفر

= $\frac{1}{2}$[$\frac{3}{8}$+$\frac{4}{8}$]× ١= $\boxed{\frac{7}{16}}$



مثال س~ متغيراً عشوائياً متصلاً ودالة كثافة الاحتمال له هي:



د(س)= { $\frac{2س+3}{18}$ عندما ٢ ≤ س ≤ ٤
صفر فيما عدا ذلك.

١) أثبت أن ل(٢≤س~≤٤)=١ ٢) أوجد ل(س~≥٣)

الحل:



د(٢)= $\frac{3+(2\times2)}{18}$ = $\frac{7}{18}$ ، د(٤)= $\frac{11}{18}$

د(٣)= $\frac{9}{18}$

١) ل (٢ ≤ س ≤ ٤) = $\frac{1}{2}$ [د(٢)+د(٤)] × (٤−٢)

= $\frac{1}{2}$ [$\frac{7}{18}$ + $\frac{11}{18}$] ×(٢)= $\frac{1}{2}$ ×١×٢= ~~٠~~ 1

٢) ل(س ≤ ٣) = ل(٢ ≤ س ≤ ٣)

= $\frac{1}{2}$ [د(٢)+د(٣)]×(٣−٢)

= $\frac{1}{2}$ [$\frac{7}{18}$ + $\frac{9}{18}$] × $\frac{1}{2}$ × $\frac{16}{18}$ = $\frac{4}{9}$

مثال **إذا كان س متغيراً عشوائياً متصلاً دالة كثافة الاحتمال له هي:**

د(س)= { $\frac{1}{4}$ س − ك عندما ٤ ≤ س ≤ ٦ ؛ صفر فيما عدا ذلك.

فأوجد ١) قيمة ك **٢)** ل(س ≤ ٥)

الحل:

١) ∵ مساحة المنطقة الواقعة تحت منحنى دالة الكثافة وفوق محور السينات على الفترة [٤،٦] تساوى الواحد الصحيح

∴ $\frac{1}{2}$ [د(٤)+د(٦)] × (٦−٤)=١ ∴ $\frac{1}{2}$ [(١−ك)+ ($\frac{6}{4}$ −ك)] ×٢=١

∴ [١−ك + $\frac{6}{4}$ −ك]=١ ∴−٢ك=١−١− $\frac{3}{2}$ ∴٢ك= $\frac{3}{2}$ ∴ ك= $\frac{3}{4}$

٢) د(٥)= $\frac{1}{4}$ ×٥− $\frac{3}{4}$ = $\frac{2}{4}$ = $\frac{1}{2}$ ، د(٦)= $\frac{3}{4}$

ل=(س ≤ ٥) = ل(٥ ≤ س ≤ ٦) $\frac{3}{4}$

= $\frac{1}{2}$ [د(٥) +د(٦)]×(٦−٥)

= $\frac{1}{2}$ [$\frac{1}{2}$ + $\frac{3}{4}$]×١= $\frac{5}{8}$

مثال **إذا كان س متغيراً عشوائياً متصلاً دالة كثافة الاحتمال له هي:**

د(س) = { $\frac{1}{5}$ عندما ٠ ≤ س ≤ ٥
صفر فيما عدا ذلك.

فأوجد ١) ل (٠ ≤ س ≤ ٣) ٢) ل (س ≥ ٣)

الحل:

د(٠) = $\frac{1}{5}$ ، د(٣) = $\frac{1}{5}$ ، د(٥) = $\frac{1}{5}$

١) ل (٠ ≤ س ≤ ٣) = $\frac{1}{2}$ [د(٠) + د(٣)] × (٣ − ٠)

= $\frac{1}{2}$ [$\frac{1}{5}$ + $\frac{1}{5}$] × ٣

= $\frac{1}{2}$ × $\frac{2}{5}$ × ٣ = $\frac{3}{5}$

٢) ل (س ≥ ٣) = ل (٣ ≤ س ≤ ٥)

= $\frac{1}{2}$ [د(٣) + د(٥)] × (٥ − ٣) = $\frac{1}{2}$ [$\frac{1}{5}$ + $\frac{1}{5}$] × ٢

= $\frac{1}{2}$ × $\frac{2}{5}$ × ٢ = $\frac{2}{5}$

مثال **إذا كان س متغير عشوائي متصل دالة كثافة الاحتمال له هي:**

د(س) = { $\frac{1}{6}$ س عندما ٠ ≤ س < ٢
$\frac{1}{3}$ عندما ٢ ≤ س ≤ ٤
صفر فيما عدا ذلك

١) حقق أن مساحة المنطقة الواقعة تحت منحني الدالة وفوق محور السينات بين س = ٠ ، س = ٤ تساوي الواحد الصحيح. ٢) أوجد ل (س ≤ ١)



الحل:

$د(٠)= ٠ \quad ، \quad د(٢)= \frac{2}{6} \quad ، \quad د(٤)= \frac{1}{3} \quad ، \quad د(١)= \frac{1}{6}$

١) $ل(٠ \leqslant س \leqslant ٤) = ل(٠ \leqslant س < ٢) + ل(٢ \leqslant س \leqslant ٤)$

$= \frac{1}{2}[د(٠)+د(٢)] \times (٢-٠) + \frac{1}{2}[د(٢)+د(٤)] \times (٤-٢)$

$= \frac{1}{2}[٠ + \frac{2}{6}] \times ٢ + \frac{1}{2} \times \frac{4}{6} \times ٢$

$= \frac{2}{6} + \frac{4}{6} = \boxed{١}$

٢) $ل(س \geqslant ١) = ل(١ \leqslant س < ٢) + ل(٢ \leqslant س \leqslant ٤)$

$= \frac{1}{2}[\frac{1}{6} + \frac{2}{6}] \times ١ + \frac{1}{2}[\frac{2}{6} + \frac{1}{3}] \times ٢$

$= \frac{1}{2} \times \frac{3}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{6} \times ٢ = \frac{3}{12} + \frac{4}{6} = \boxed{\frac{11}{12}}$

تدريبات ١

١) مصر ١٩٩٢ س متغير عشوائي متصلاً ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$د(س) = \begin{cases} \frac{1}{8}(١+س) & حيث \ ٢ \leqslant س \leqslant ٤ \\ صفر & فيما \ عدا \ ذلك \end{cases}$$

١) بين أن مساحة المنطقة الواقعة تحت منحني الدالة وفوق محور السينات بين س=٢، س=٤ تساوى الواحد الصحيح.

٢) أوجد $ل(س < ٣)$

٢) مصر ١٩٩٦ إذا كان س متغيراً عشوائياً متصلاً ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$د(س) = \begin{cases} \frac{1}{18}(س+٣) & حيث \ -٣ < س < ٣ \\ صفر & فيما \ عدا \ ذلك \end{cases}$$

فأوجد ١) $ل(س < ٠)$ ٢) $ل(-١ < س < ٢)$

٣) مصر ١٩٩٧ إذا كان س متغيراً عشوائياً متصلاً ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$د(س) = \begin{cases} \frac{2}{27}(س+١) & حيث ٢ \leqslant س \leqslant ٥ \\ صفر & فيما عدا ذلك \end{cases}$$

١) أثبت أن د(س) دالة كثافة احتمال للمتغير العشوائي س.

٢) أوجد ل (س > ٣)

٤) مصر ١٩٩٤ إذا كان س متغير عشوائي متصلاً ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$د(س) = \begin{cases} أ س & حيث ٠ \leqslant س \leqslant ٢ \\ صفر & فيما عدا ذلك \end{cases}$$

فأوجد ١) قيمة أ

٢) ل (١ ≥ س ≥ ٢)

٥) مصر ٢٠٠٢ إذا كان س متغيراً عشوائياً متصلاً ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$د(س) = \begin{cases} أ س & حيث ٠ \leqslant س \leqslant ٤ \\ صفر & فيما عدا ذلك. \end{cases}$$

فأوجد ١) قيمة أ

٢) ل (١ < س < ٣)







الباب الرابع التوزيع الطبيعي المعياري

التوزيع الطبيعي المعياري

بعض خواص المنحني الطبيعي:

١) المنحني متماثل بالنسبة للمستقيم س= μ وله قيمة واحدة إحداثها السيني= μ.

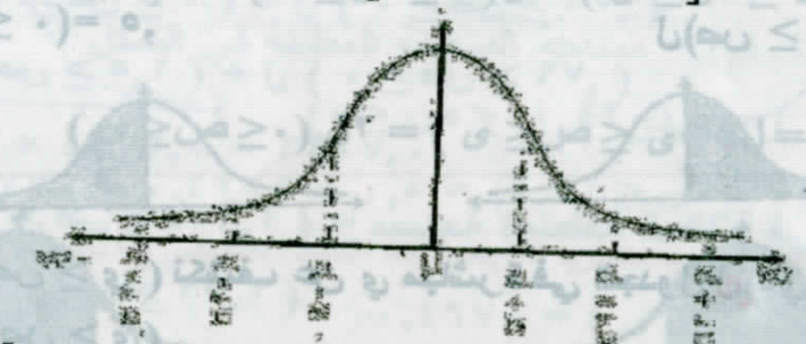
٢) من التماثل نجد أن المستقيم س= μ يقسم المساحة الواقعة تحت المنحني وفوق محور السينات إلي منطقتين مساحة كل منهما= ٠,٥

٣) إذا كانت المساحة تحت المنحني الطبيعي وفوق محور السينات=م فإن:

المساحة فوق الفترة [$\mu - \sigma$ ، $\mu + \sigma$]≃٦٨,٢٦٪ من م.

المساحة فوق الفترة [$\mu - 2\sigma$ ، $\mu + 2\sigma$]≃٩٥,٤٤٪ من م.

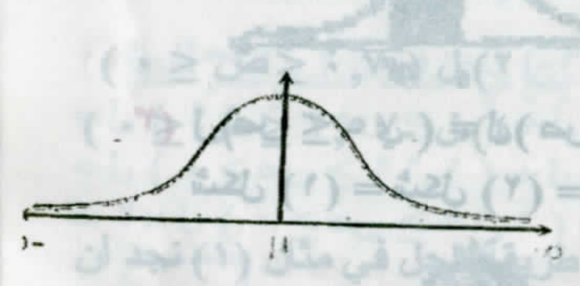
المساحة فوق الفترة [$\mu - 3\sigma$ ، $\mu + 3\sigma$]≃٩٩,٧٤٪ من م.



لاحظ أنه يجب أن يكون عدد البيانات كبيراً حتى يكون التوزيع الطبيعي تقريباً.

التوزيع الطبيعي المعياري (القياسي)

لاحظنا فى التوزيع الطبيعي أنه عند إيجاد الاحتمال تكون أطوال الفترات من مضاعفات الانحراف المعياري حتى يمكن حساب الاحتمال، لذلك كان من المناسب تحويل التوزيعات الطبيعية إلى توزيعات طبيعية معيارية وذلك بتحويل قيم(س) إلي قيم معيارية(ص) وذلك بمعلومية المتوسط (μ) والانحراف المعياري(σ) عندما يكون: μ =٠، σ =٠



تعريف : إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س~ هو التوزيع الطبيعي بمتوسط μ وانحراف معياري σ

فإن ص= $\frac{س\sim - \mu}{\sigma}$ هو توزيع طبيعي معياري، متوسطه μ =صفر

وانحرافه المعياري σ =١.



بعض خواص دالة الكثافة للتوزيع الطبيعي المعياري (ص)

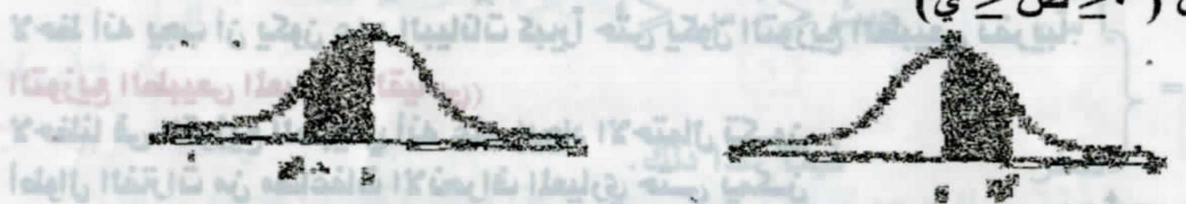
١) المنحني يقع أعلي المحور الأفقي (محور السينات)
٢) متماثل بالنسبة للمحور الرأسي (محور الصادات)
٣) طرفا المنحني يمتدان إلى ما لا نهاية دون أن يلتقيا بالمحور الأفقي.
٤) مساحة المنطقة أسفل المنحني وفوق المحور الأفقي= ١.
٥) من التماثل نجد أن المحور الرأسي يقسم المساحة الواقعة تحت المنحني وفوق المحور الأفقي إلى منطقتين مساحة كل منهما= ٠,٥.
٦) يمكن حساب المساحة التقريبية للمنطقة أسفل المنحني المعياري فقط وفوق أى فترة]أ،ب[بواسطة جداول خاصة.

• **وفيما يلي ملخص لقواعد استخدام المساحات تحت المنحني الطبيعي المعياري حيث ي ، ك أعداد موجبة ، ي > ك**

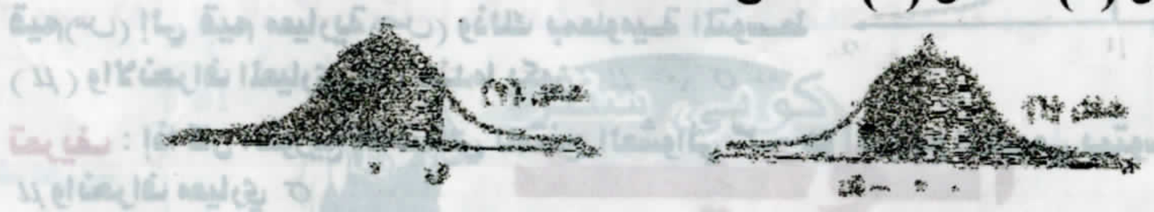
١) ل(ص ≤ ٠)= ٫٥ ل(ص ≥ ٠)= ٫٥



٢) ل(٠ ≤ص ≤ ي) نكشف عن ي مباشرة في الجدول ل(-ي ≤ص ≤ ٠) = ل (٠≤ص ≤ ي)

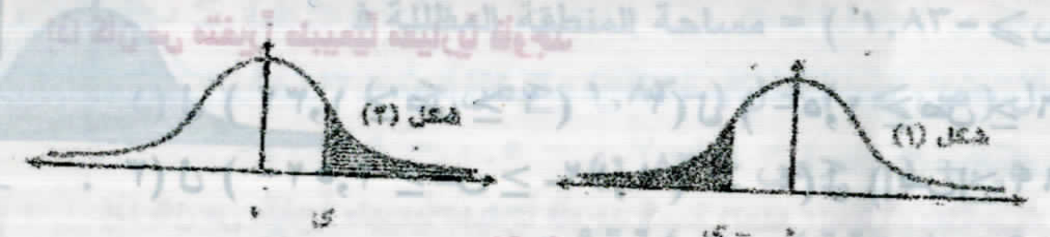


٣) ل(ص ≤ - ي) = ل(ص ≥ ي) = ٫٥ + ل(٠≤ص ≤ ي)
شكل (١) = شكل (٢) = نفس المساحة

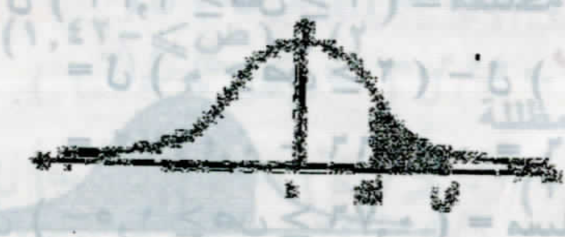


٤) ل(ص≥ - ي) = ل (ص ≤ ي) = ٫٥ - ل(٠≤ ص ≤ ي) شكل (١) = شكل (٢) = نفس المساحة





٥) ل(−ى ≤ ص ≤ −ك) = ل(ك ≤ ص ≤ ى) = ل(٠ ≤ ص ≤ ى) − ل(٠ ≤ ص ≤ ك)




٦) ل(−ك ≤ ص ≤ ى) = ل(٠ ≤ ص ≤ ك) + ل(٠ ≤ ص ≤ ى)

٧) ل(|ص| ≤ ى) = ل(−ى ≤ ص ≤ ى) = ٢ ل(٠ ≤ ص ≤ ى)




مثال إذا كان ص متغيراً طبيعيا معيارياً فأوجد :

١) ل(−٠,٠٦ ≤ ص ≤ ٠) ٢) ل(−٠,٧ ≤ ص ≤ ٠)

٣) ل(−٠,٩٥ ≤ ص ≤ ٠) ٤) ل(−٢,٥٧ ≤ ص ≤ ٠)

الحل

من خاصية تماثل المنحني حول محور الصادات وبنفس طريقة الحل في مثال (١) نجد أن

١) ل(−٠,٠٦ ≤ ص ≤ ٠) = ل(٠ ≤ ص ≤ ٠,٠٦) = ٠,٠٢٣٩

٢) ل(−٠,٧ ≤ ص ≤ ٠) = ل(٠ ≤ ص ≤ ٠,٧) = ٠,٢٥٨٠

٣) ل(−٠,٩٥ ≤ ص ≤ ٠) = ل(٠ ≤ ص ≤ ٠,٩٥) = ٠,٣٢٨٩

٤) ل(−٢,٥٧ ≤ ص ≤ ٠) = ل(٠ ≤ ص ≤ ٢,٥٧) = ٠,٤٩٤٩



مثال إذا كان ص متغيراً طبيعياً معيارياً فأوجد

١) ل (١,٣٢ ≤ ص ≤ ٢)   ٢) ل (-١,٥ ≤ ص ≤ ٠,٧٦)

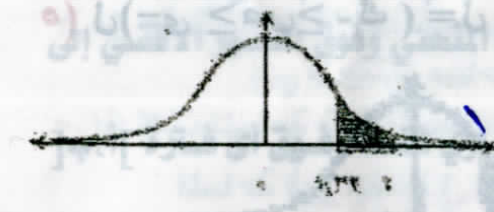
٣) ل (-٢,٥٢ ≤ ص ≤ -١,١٢)   ٤) ل (|ص| ≤ ١,٦٩)

الحل

١) ل (١,٣٢ ≤ ص ≤ ٢) = مساحة المنطقة المظلل

= ل (٠ ≤ ص ≤ ٢) - ل (٠ ≤ ص ≤ ١,٣٢)

= ٠,٤٧٧٢ - ٠,٤٠٦٦ = ٠,٠٧٠٦

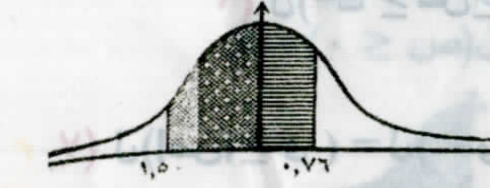


٢) ل (-١,٥ ≤ ص ≤ ٠,٧٦) = مساحة المنطقة المظللة في الشكل

= ل (-١,٥ ≤ ص ≤ ٠) + ل (٠ ≤ ص ≤ ٠,٧٦)

= ل (٠ ≤ ص ≤ ١,٥) + ل (٠ ≤ ص ≤ ٠,٧٦)

= ٠,٤٣٣٢ + ٠,٢٧٦٤ = ٠,٧٠٩٦

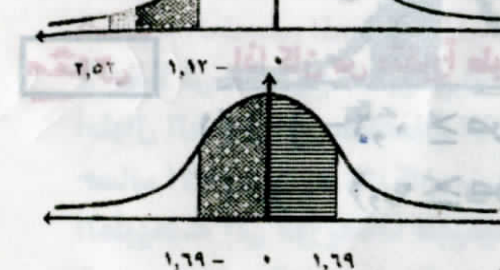


٣) ل (-٢,٥٢ ≤ ص ≤ -١,١٢) = مساحة المنطقة المظللة في الشكل

= ل (١,١٢ ≤ ص ≤ ٢,٥٢)

= ل (٠ ≤ ص ≤ ٢,٥٢) - ل (٠ ≤ ص ≤ ١,١٢)

= ٠,٤٩٤١ - ٠,٣٦٨٦ = ٠,١٢٥٥



٤) ل (|ص| ≤ ١,٦٩) = ل (-١,٦٩ ≤ ص ≤ ١,٦٩)

= ل (-١,٦٩ ≤ ص ≤ ٠) + ل (٠ ≤ ص ≤ ١,٦٩)

= ل (٠ ≤ ص ≤ ١,٦٩) + ل (٠ ≤ ص ≤ ١,٦٩)

= ٢ × ل (٠ ≤ ص ≤ ١,٦٩) = ٢ × ٠,٤٥٤٥ = ٠,٩٠٩

مثال إذا كان ص متغيراً طبيعياً معيارياً فأوجد :

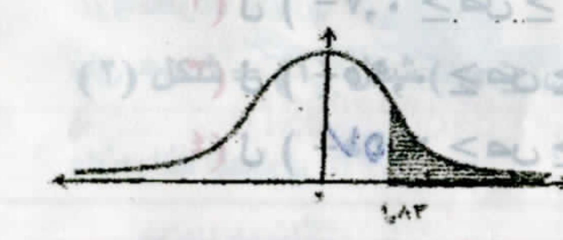
١) ل (ص ≥ ١,٨٣)   ٢) ل (ص ≥ -١,٨٣)

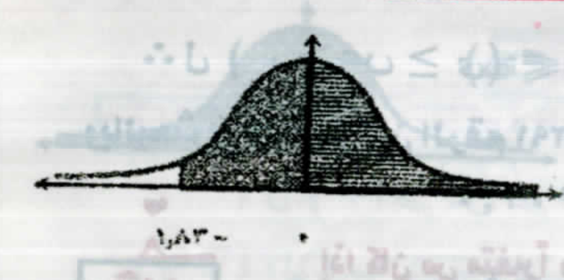
الحل

١) ل (ص ≥ ١,٨٣) = مساحة المنطقة المظللة ف

= ل (ص ≥ ٠) - ل (٠ ≤ ص ≤ ١,٨٣)

= ٠,٥ - ٠,٤٦٦٤ = ٠,٠٣٣٦





٢) ل (ص ⩾ -١,٨٣) = مساحة المنطقة المظللة ف

= ل (ص ⩾ ٠) + ل (-١,٨٣ ≤ ص ≤ ٠)

= ٠,٥ + (٠ ≤ ص ≤ ١,٨٣)

= ٠,٥ + ٠,٤٦٦٤ = ٠,٩٦٦٤

مثال إذا كان ص متغيراً طبيعياً معيارياً فأوجد :

١) ل (ص ⩽ ١,٤٢) ٢) ل (ص ⩾ -١,٤٢)

الحل

١) ل (ص ⩽ ١,٤٢) = مساحة المنطقة المظللة

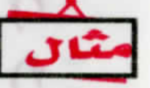
= ل(ص ⩽ ٠) + ل (٠ ≤ ص ≤ ١,٤٢)

= ٠,٥ + ٠,٤٢٢٢ = ٠,٩٢٢٢

٢) ل (ص ⩽ -١,٤٢) = مساحة المنطقة المظللة في الشكل

= ل(ص ⩽ ٠) - ل (-١,٤٢ ≤ ص ≤ ٠)

= ٠,٥ - ل (٠ ≤ ص ≤ ١,٤٢) = ٠,٥ - ٠,٤٢٢٢ = ٠,٠٧٧٨


مثال إذا كان ص متغيراً طبيعياً معيارياً فأوجد قيمة العدد الحقيقي ي الذي يحقق كل مما يأتي :

١) ل (٠ ≤ ص ≤ ى) = ٠,٤٦٧٨

٢) ل (ى ≤ ص ≤ ٢,٤٣) = ٠,٢٠١٥

الحل

١) بالبحث عن العدد ٠,٤٦٧٨ ادخل جدول المساحات ، نجد أنه يقع في الصف التاسع عشر الذي يبدأ بالعدد ١,٨ وتحت العمود ٠,٠٥ ∴ ى = ١,٨٥

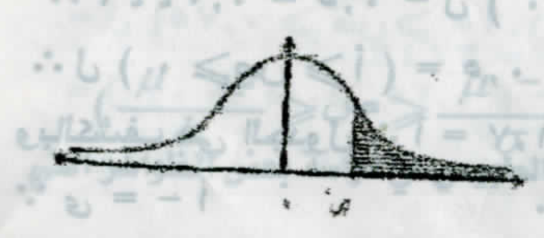
ملاحظة : إذا لم نجد العدد نفسه فنأخذ أقرب عدد له.

٢) ∵ الاحتمال ٠,٢٠١٥ < ٠,٥

∴ ي ، ٢,٤٣ يقعان في نفس الجهة من العدد (٠)

∴ ل (ي ≤ ص ≤ ٢,٤٣) - ل (٠ ≤ ص ≤ ى)

∴ ٠,٢٠١٥ = ٠,٤٩٢٥ - ل (٠ ≤ ص ≤ ى)



∴ ل (٠ ≤ ص ≤ ى) = ٠,٤٩٢٥ − ٠,٢٠١٥ = ٠,٢٩١

وبالبحث في الجدول عن الرقم ٠,٢٩١ نجد أنه يقع في الصف التاسع أمام ٠,٨ وتحت العمود ٠,٠١

∴ ى = ٠,٨١

مثال **إذا كان ص متغيراً طبيعياً معيارياً فأوجد قيمة العدد الحقيقي الموجب ي الذي يحقق العلاقة في كل مما يأتي**

١) ل (ص ≥ ى) = ٠,١٥٨٧   ٢) ل (ص ≥ ى) = ٠,٩٣٣٢

٣) ل (ص ≤ ى) = ٠,٠٤٤٦   ٤) ل (ص ≤ ى) = ٠,٧٠١٩

الحل

١) ل (ص ≥ ى) = ل(ص ≥ ٠) − ل (٠ ≤ ص ≤ ى)

∴ ٠,١٥٨٧ = ٠,٥ − ل(٠ ≤ ص ≤ ى)

∴ ل(٠ ≤ ص ≤ ى) = ٠,٥ − ٠,١٥٨٧ = ٠,٣٤١٣

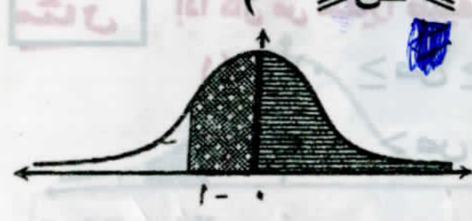
وبالكشف في الجدول ∴ ى = ١

٢) لاحظ أن : ٠,٩٣٣٢ > ٠,٥ ، ص ≥ ى أي أن ي عدد سالب ولنفرض أنه − أ

ل (ص ≥ − أ) = ل (ص ≥ ٠) + ل (− أ ≤ ص ≤ ٠)

∴ ٠,٩٣٣٢ = ٠,٥ + ل (٠ ≤ ص ≤ أ)

∴ ل (٠ ≤ ص ≤ أ) = ٠,٩٣٣٢ − ٠,٥ = ٠,٤٣٣٢



وبالكشف في الجدول ∴ أ = ١,٥

∵ ى = − أ   ∴ ى = −١,٥

٣) ∵ ٠,٠٤٦٦ < ٠,٥ ، ص ≤ ى

∴ ى عدد سالب ولنفرض أنه − أ

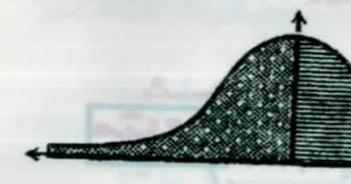
ل (ص ≤ − أ) = ل (ص ≤ ٠) − ل (− أ ≤ ص ≤ ٠)

∴ ٠,٠٤٤٦ = ٠,٥ − ل (٠ ≤ ص ≤ أ)

∴ ل (٠ ≤ ص ≤ أ) = ٠,٥ − ٠,٠٤٤٦ = ٠,٤٥٥٤

وبالكشف في الجدول ∴ أ = ١,٧

∵ ى = − أ   ∴ ى = −١,٧



٤) ل (ص ⩽ ى) = ل (ص ⩽ ٠) + ل (٠ ⩽ ص ⩽ ى)

∴ ٠,٧٠١٩ = ٠,٥ + ل (٠ ⩽ ص ⩽ ى)

∴ ل (٠ ⩽ ص ⩽ ى) = ٠,٧٠١٩ - ٠,٥ = ٠,٢٠١٩

وبالكشف في الجدول ∴ ى = ٠,٥٣

تدريبات ١

١) إذا كان ص متغيراً عشوائياً طبيعياً معيارياً فاحسب الاحتمالات الآتية :

١) ل (٠ ⩽ ص ⩽ ٠,٤)
٢) ل (٠ ⩽ ص ⩽ ٢,٠٥)
٣) ل (-٠,٠٣ ⩽ ص ⩽ ٠)
٤) ل (-٠,١ ⩽ ص ⩽ ٠)
٥) ل (-٠,٢٢ ⩽ ص ⩽ ٠)
٦) ل (٠,٢٣ ⩽ ص ⩽ ١,٥٦)
٧) ل (-١٠,٧٤ ⩽ ص ⩽ ١,٢٨)
٨) ل (-٠,٩ ⩽ ص ⩽ ٢,١)
٩) ل (ص ⩽ ١,٨)
١٠) ل (ص ⩽ -٠,٩٥)

٢) إذا كان ص متغيراً عشوائياً طبيعياً معيارياً فأوجد العدد الحقيقي ى الذي يحقق كل علاقة فيما يلي:-

١) ل (٠ ⩽ ص ⩽ ى) = ٠,٤٥٠٥
٢) ل (- ى ⩽ ص ⩽ ٠) = ٠,٤٩٩٠
٣) ل (ي ⩽ ص ⩽ ٢) = ٠,٠٤٤٠
٤) ل (ى ⩽ ص ⩽ ٢,٧٢) = ٠,١٩٧٢

حساب الاحتمالات للمتغير الطبيعي غير المعياري وتطبيقات عملية للتوزيع الطبيعي

إذا كان لدينا متغير طبيعي س متوسطه μ وانحرافه المعياري σ فإنه يمكن تحويله إلي متغير طبيعي معياري ص حسب القاعدة ص = $\frac{س - \mu}{\sigma}$
وبذلك يمكن استخدام جدول المساحات الخاص بالتوزيع الطبيعي المعياري في حساب احتمالات وقوع المتغير س في أي فترة [أ ، ب] حيث

$$ل (أ \leqslant س \leqslant ب) = ل \left(\frac{أ - \mu}{\sigma} \leqslant ص \leqslant \frac{ب - \mu}{\sigma} \right)$$

وسوف نتناول بعض الاستخدامات المختلفة للمتغير العشوائي الطبيعي في دراسة بعض الظواهر التي يعبر عنها من خلال الأمثلة التالية.

• أمثلة توضيحية •

مثال إذا كان س متغيراً طبيعياً متوسطه = ١٢ وانحرافه المعياري = ٤ فأوجد كلاً من :

١) ل (١٢ ⩽ س ⩽ ١٨) ٢) ل (٨ ⩽ س ⩽ ١٦)

٣) ل (١٠ ⩽ س ⩽ ١٨) ٤) ل (١٥ ⩽ س ⩽ ١٧)

الحل

بتحويل المتغير الطبيعي س إلي متغير طبيعي معياري ص حسب القاعدة ص = (س − μ) / σ أي

ص = (س − ١٢) / ٤

١) ل (١٢ ⩽ س ⩽ ١٨) = ل ((١٢ − μ)/σ ⩽ ص ⩽ (١٨ − μ)/σ)

= ل ((١٢ − ١٢)/٤ ⩽ ص ⩽ (١٨ − ١٢)/٤)

= ل (٠ ⩽ ص ⩽ ١,٥) = ٠,٤٣٣٢

٢) ل (٨ ⩽ س ⩽ ١٦) = ل ((٨ − ١٢)/٤ ⩽ ص ⩽ (١٦ − ١٢)/٤)

= ل (−١ ⩽ ص ⩽ ١)

= ٢ل (٠ ⩽ ص ⩽ ١)

= ٢ × ٠,٣٤١٣ = ٠,٦٨٢٦

٣) ل (١٠ ⩽ س ⩽ ١٨) = ل ((١٠ − ١٢)/٤ ⩽ ص ⩽ (١٧ − ١٢)/٤)

= ل (−٠,٥ ⩽ ص ⩽ ١,٥) = ل (٠ ⩽ ص ⩽ ٠,٥) + ل (٠ ⩽ ص ⩽ ١,٥)

= ٠,٤٣٣٢ + ٠,١٩١٥ = ٠,٦٢٤٧

−٠,٥ ١,٥

٤) ل (١٥ ⩽ س ⩽ ١٧)

= ل ((١٥ − ١٢)/٤ ⩽ ص ⩽ (١٧ − ١٢)/٤)

= ل (٠,٧٥ ⩽ ص ⩽ ١,٢٥)

= ل (٠ ⩽ ص ⩽ ١,٢٥) − ل (٠ ⩽ ص ⩽ ٠,٧٥)

= ٠,٣٩٤٤ − ٠,٢٧٣٤ = ٠,١٢١

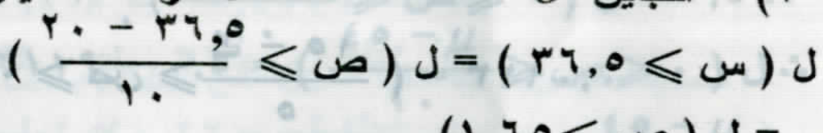
٠,٧٥ ١,٢٥

مثال إذا كان س متغيراً طبيعياً متوسطه = ٢٠ وتباينه = ١٠٠ فأوجد كلاً من :

١) ل (س ≥ ٣٦,٥)　　　٢) ل (س ≤ ٣٦,٥)

الحل

١) ∵ التباين σ^2 = ١٠٠　∴ الانحراف المعياري = √التباين = √١٠٠ = ١٠

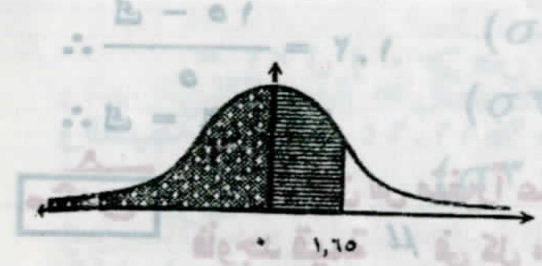


ل (س ≥ ٣٦,٥) = ل (ص ≥ (٣٦,٥ − ٢٠) / ١٠)

= ل (ص ≥ ١,٦٥)

= ٠,٥ − ل (٠ ≤ ص ≤ ١,٦٥)

= ٠,٥ − ٠,٤٥٠٥ = ٠,٠٤٩٥



٢) ل (س ≤ ٣٦,٥) = ل (ص ≤ (٣٦,٥ − ٢٠) / ١٠)

= ل (ص ≤ ١,٦٥)

= ٠,٥ + ل (٠ ≤ ص ≤ ١,٦٥)

= ٠,٥ + ٠,٤٥٠٥ = ٠,٩٥٠٥

مثال إذا كان س متغيراً عشوائياً طبيعياً متوسطه μ = ١٥ وانحرافه المعياري σ = ٥ فأوجد قيمة العدد الحقيقي ك الذي يحقق :

١) ل(س ≤ ك) = ٠,٨٤١٣　　　٢) ل(ك ≤ س ≤ ٢٥) = ٠,٠٩٢٣

الحل

١) ∵ ل (س ≤ ك) = ٠,٨٤١٣

∴ ل (ص ≤ (ك − ١٥) / ٥) = ٠,٨٤١٣

∴ ٠,٥ + ل (٠ ≤ ص ≤ (ك − ١٥) / ٥) = ٠,٨٤١٣

∴ ل (٠ ≤ ص ≤ (ك − ١٥) / ٥) = ٠,٨٤١٣ − ٠,٥ = ٠,٣٤١٣

∴ (ك − ١٥) / ٥ = ١　　∴ ك − ١٥ = ٥

∴ ك = ٥ + ١٥　　∴ ك = ٢٠



٢) ل(ك ⩽ س ⩽ ٢٥) = ٠,٠٩٢٣

∴ ل ($\frac{ك - ١٥}{٥}$ ⩽ ص ⩽ $\frac{٢٥ - ١٥}{٥}$) = ٠,٠٩٢٣

∴ ل = ($\frac{ك - ١٥}{٥}$ ⩽ ص ⩽ ٢) = ٠,٠٩٢٣

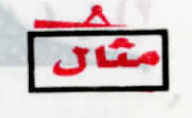
∴ ل(٠ ⩽ ص ⩽ ٢) − ل (٠ ⩽ ص ⩽ $\frac{ك - ١٥}{٥}$) = ٠,٠٩٢٣

∴ ٠,٤٧٧٢ − ل(٠ ⩽ ص ⩽ $\frac{ك - ١٥}{٥}$) = ٠,٠٩٢٣

∴ ل(٠ ⩽ ص ⩽ $\frac{ك - ١٥}{٥}$) = ٠,٤٧٧٢ − ٠,٠٩٢٣ = ٠,٣٨٤٩

∴ $\frac{ك - ١٥}{٥}$ = ١,٢ ∴ ك − ١٥ = ٥ × ١,٢

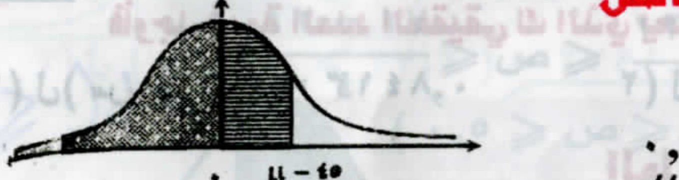
∴ ك = ٦ + ١٥ ∴ ك = ٢١



مثال إذا كان س متغيراً عشوائياً طبيعياً متوسطه μ وانحرافه المعياري σ = ١٠ فأوجد قيمة μ في كل مما يأتي

١) ل (س ⩽ ٤٥) = ٠,٩٣٣٢ ٢) ل (س ⩽ ٤٥) = ٠,٢١١٩

الحل



١) ∵ ل (س ⩽ ٤٥) = ٠,٩٣٣٢

∴ ل (ص ⩽ $\frac{٤٥ - \mu}{١٠}$) = ٠,٩٣٣٢

∴ ٠,٥ + ل (٠ ⩽ ص ⩽ $\frac{٤٥ - \mu}{١٠}$) = ٠,٩٣٣٢

∴ ل (٠ ⩽ ص ⩽ $\frac{٤٥ - \mu}{١٠}$) = ٠,٩٣٣٢ − ٠,٥ = ٠,٤٣٣٢

∴ $\frac{٤٥ - \mu}{١٠}$ = ١,٥ ∴ ٤٥ − μ = ١٠ × ١,٥

∴ ٤٥ − ١٥ = μ ∴ μ = ٣٠

٢) ل (س ⩽ ٤٥) = ٠,٢١١٩

∴ ل (ص ⩽ $\frac{٤٥ - \mu}{١٠}$) = ٠,٢١١٩

$\therefore$ ٠,٥ − ل $\left(\frac{٤٥-\mu}{١٠} \leqslant \text{ص} \leqslant ٠ \right) = ٠,٢١١٩$

وحيث أن $\frac{٤٥-\mu}{١٠}$ = عدد سالب $\therefore$ $\frac{\mu-٤٥}{١٠}$ = عدد موجب

$\therefore$ ٠,٥ − ل $\left(٠ \leqslant \text{ص} \leqslant \frac{\mu-٤٥}{١٠} \right) = ٠,٢١١٩$

$\therefore$ ل $\left(٠ \leqslant \text{ص} \leqslant \frac{\mu-٤٥}{١٠} \right) = ٠,٥ - ٠,٢١١٩ = ٠,٢٨٨١$

$\therefore \frac{\mu-٤٥}{١٠} = ٠,٨$ $\qquad$ $\therefore \mu - ٤٥ = ٠,٨ \times ١٠$

$\therefore \mu = ٨ + ٤٥$ $\qquad$ $\therefore \mu = ٥٣$

مثال إذا كان س متغيراً عشوائياً طبيعياً متوسطه μ وانحرافه المعياري σ أوجد قيمة

١) ل $(\mu - \sigma \leqslant \text{س} \leqslant \mu + \sigma)$

٢) ل $(\mu - \sigma \leqslant \text{س} \leqslant \mu + ٢\sigma)$

٣) ل $(\mu + ٢\sigma \leqslant \text{س} \leqslant \mu + ٣\sigma)$

الحل ١) ل $(\mu - \sigma \leqslant \text{س} \leqslant \mu + \sigma)$

= ل $\left(\frac{\mu-\sigma-\mu}{\sigma} \leqslant \text{ص} \leqslant \frac{\mu+\sigma-\mu}{\sigma} \right)$

= ل $(-١ \leqslant \text{ص} \leqslant ١)$ = ٢ل $(٠ \leqslant \text{ص} \leqslant ١) = ٢ \times ٠,٣٤١٣ = ٠,٦٨٢٦$

٢) ل $(\mu - \sigma \leqslant \text{س} \leqslant \mu + ٢\sigma)$

= ل $\left(\frac{\mu-\sigma-\mu}{\sigma} \leqslant \text{ص} \leqslant \frac{\mu+٢\sigma-\mu}{\sigma} \right)$

= ل $(-١ \leqslant \text{ص} \leqslant ٢)$ = ل $(٠ \leqslant \text{ص} \leqslant ١)$ + ل $(٠ \leqslant \text{ص} \leqslant ٢) = ٠,٣٤١٣ + ٠,٤٧٧٢ = ٠,٨١٨٥$

٣) ل $(\mu + ٢\sigma \leqslant \text{س} \leqslant \mu + ٣\sigma)$

= ل $\left(\frac{\mu+٢\sigma-\mu}{\sigma} \leqslant \text{ص} \leqslant \frac{\mu+٣\sigma-\mu}{\sigma} \right)$

= ل $(٢ \leqslant \text{ص} \leqslant ٣)$

= ل $(٠ \leqslant \text{ص} \leqslant ٣)$ − ل $(٠ \leqslant \text{ص} \leqslant ٢) = ٠,٤٩٨٧ - ٠,٤٧٧٢ = ٠,٠٢١٥$

مثال **إذا كان توزيع درجات ١٠٠٠طالب من القسم الأدبي في مادة الإحصاء هو توزيعاً طبيعياً بمتوسط قدره**

٢١درجة وانحراف معياري قدره درجتين :

١) أوجد ل (١٨ ⩽ س ⩽ ٢٤) موضحاً ما تعنيه النتيجة

٢) ما احتمال أن يحصل الطالب علي ٢٣ درجة فأكثر ؟

٣) ما عدد الطلبة الذين حصلوا علي ٢٢ درجة فأكثر ؟

الحل

١) ل (١٨ ⩽ س ⩽ ٢٤) = ل ($\frac{١٨ - ٢١}{٢}$ ⩽ ص ⩽ $\frac{٢٤ - ٢١}{٢}$)

= ل (−١٫٥ ⩽ ص ⩽ ١٫٥)

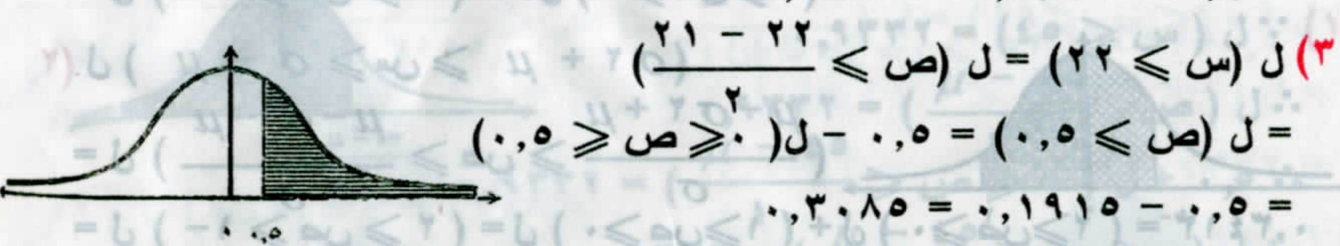
= ٢× ل (٠ ⩽ ص ⩽ ١٫٥) = ٢ × ٠٫٤٣٣٢ = ٠٫٨٦٦٤

والنتيجة تعني أن ٨٦٫٦٤% من الطلاب يحصلون علي درجات تتراوح ما بين ١٨ ، ٢٤ درجة

٢) ل (س ⩾ ٢٣) = ل (ص ⩾ $\frac{٢٣ - ٢١}{٢}$)

= ل (ص ⩾ ١) = ٠٫٥ − ل(٠⩽ ص ⩽ ١)

= ٠٫٥ − ٠٫٣٤١٣ = ٠٫١٥٨٧



٣) ل (س ⩾ ٢٢) = ل (ص ⩾ $\frac{٢٢ - ٢١}{٢}$)

= ل (ص ⩾ ٠٫٥) = ٠٫٥ − ل(٠⩽ ص ⩽ ٠٫٥)

= ٠٫٥ − ٠٫١٩١٥ = ٠٫٣٠٨٥

∴ عدد الطلبة الذين حصلوا علي ٢٢ درجة فأكثر = الاحتمال × العدد الكلي

= ٠٫٣٠٨٥ × ١٠٠٠ = ٣٠٨٫٥ ≃ ٣٠٩ طالباً

مثال **إذا كان أوزان الطلبة في احدي المدارس الثانوية تتبع توزيعاً طبيعياً متوسطه ٦٢كجم ، وانحرافه المعياري ٢كجم**

١) احسب النسبة المئوية للطلاب الذين تقع أوزانهم بين ٥٨ كجم و٦٥كجم

٢) إذا كان عدد الطلاب ١٠٠٠ طالب فاحسب عدد الطلبة الذين تزيد أوزانهم عن ٦٥ كجم



الحل

١) ل (٥٨ < س < ٦٥) = ل ($\frac{٥٨ - ٦٢}{٢}$ < ص < $\frac{٦٥ - ٦٢}{٢}$)

ل(-٢ < ص < ١,٥) = ل (٠ < ص < ٢) + ل (٠ < ص < ١,٥)

= ٠,٤٧٧٢ + ٠,٤٣٣٢ = ٠,٩١٠٤

∴ النسبة المئوية للطلاب الذين تقع أوزانهم بين ٥٨ كجم و٦٥ كجم

= الاحتمال × ١٠٠٪ = ٩١,٠٤٪

٢) ل (س > ٦٥) = ل (ص > $\frac{٦٥ - ٦٢}{٢}$)

= ل (ص > ١,٥) = ٠,٥ - ل(٠ ⩽ ص ⩽ ١,٥)

= ٠,٥ - ٠,٤٣٣٢ = ٠,٠٦٦٨

∴ عدد الطلاب الذين تزيد أوزانهم عن ٦٥٦ كجم = الاحتمال × العدد الكلي

= ٠,٠٦٦٨ × ١٠٠٠ = ٦٦,٨ ≃ ٦٧ طالباً

مثال **إذا كان الدخل الشهري لمجموعة مكونة من ٢٠٠ عامل في أحد المصانع يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط ٢٦٠ جنيهاً. وانحراف معياري σ وكان دخل ٣٣٪ من العمال يزيد عن ٢٨٠ جنيهاً.**

١) أوجد قيمة σ ٢) احسب عدد العمال الذين يقل دخلهم عن ٢٧٠ جنيهاً

الحل

١) ∵ ل (س > ٢٨٠) = ٠,٣٣

∴ ل (ص > $\frac{٢٨٠ - ٢٦٠}{\sigma}$) = ٠,٣٣

∴ ل (ص > $\frac{٢٠}{\sigma}$) = ٠,٣٣

∴ ٠,٥ - ل (٠ ⩽ ص ⩽ $\frac{٢٠}{\sigma}$) = ٠,٣٣

∴ ل (٠ ⩽ ص ⩽ $\frac{٢٠}{\sigma}$) = ٠,٥ - ٠,٣٣ = ٠,١٧

∴ $\frac{٢٠}{\sigma}$ = ٠,٤٤ ∴ σ = $\frac{٢٠}{٠,٤٤}$

∴ σ = ٤٥,٤٥

٢) ل (س > ٢٧٠) = ل (ص > $\frac{٢٦٠ - ٢٧٠}{٤٥,٤٥}$)

= ل (ص > ٠,٢٢)

= ٠,٥ + ل(٠ ⩽ ص ⩽ ٠,٢٢)

= ٠,٥ + ٠,٠٨٧١ = ٠,٥٨٧١

عدد العمال = الاحتمال × العدد الكلي

∴ عدد العمال = ٠,٥٨٧١ × ٢٠٠ = ١١٧,٤٢ ≃ ١١٧ عامل



١) اختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس

١) إذا كانت درجات فصل في امتحان الإحصاء نتبع توزيعاً طبيعياً متوسطه ٧٦ وانحرافه المعياري ٥وحصل أحمد في هذا الامتحان علي ٦٦ درجة فإن درجة أحمد في صورة معيارية هي .... (٣ ، -٢ ، ١ ، ٢)

٢) إذا كان س متغيراً طبيعياً وسطه μ =٦ والانحراف المعياري له σ = ٣ فإن المتغير الذي يخضع لتوزيع طبيعي معياري هو ....

($\frac{٦ - س}{٣}$ ، $\frac{س - ٣}{٦}$ ، $\frac{س-٦}{٣}$ ، $\frac{٣ - س}{٦}$)

٣) إذا كان ص متغيراً عشوائياً معياريا فإن ل (ص ⩽ ١,٥) تساوي لأقرب رقمين عشريين (٢,٢٣ ، ١,٥١ ، ٠,٠٧ ، ١,٢١)

٤) إذا كان س متغيراً عشوائياً وسطه الحسابي μ وانحرافه المعياري σ = ٥ فإن ل (س ⩽ ٥٥)يساوي..... (٠,٤٧٧٢ ، ٠,٩٧٧٢ ، ٠,٠٢٢٨ ، ٠,٢٣٨٦)

٢) إذا كان س متغيراً عشوائياً طبيعياً متوسطه μ = ١٠ ، وانحرافه المعياري σ = ٣ فأوجد كلاً من :

١) ل (١٠ ⩽ س ⩽ ١٤,٥) ٢) ل (٧ ⩽ س ⩽ ١٦)

٣) ل (س ⩽ ١٧,٥) ٤) ل (س ⩾ ١٧,٥)

٣) إذا كان س متغيراً عشوائياً طبيعيا متوسطه ٩ وانحرافه المعياري ٤ فأوجد كلاً من :-

١) ل (١ ⩽ س ⩽ ٥)　　٢) ل (س ⩽ ١٥)

٣) ل (٦ ⩽ س ⩽ ١٠)　　٤) ل (س⩽١١)

٤) إذا كان س متغيراً عشوائياً طبيعيا متوسطه μ = ٨ ، وانحرافه المعياري σ= ٢

١) ل (س ⩽ ١٠)

٢) إذا كان ل (س⩽ ك) = ٠,١٠٥٦ فأوجد قيمة ك

٥) إذا كان س متغيراً عشوائياً طبيعيا متوسطه μ = ٤٨ ، وانحرافه المعياري σ= ٥ فأوجد

١) ل (٤٣> س > ٥٩)

٢) قيمة ك إذا كان ل(س > ك) = ٠,١٨١٤

٦) إذا كانت درجات الحرارة في شهر أغسطس تتبع توزيعاً طبيعياً متوسطه μ = ٣٥ ، وانحرافه المعياري σ= ٥ درجات فأوجد احتمال أن تكون درجة الحرارة في يوم ما خلال هذا الشهر :

١) واقعة بين ٢٨ درجة ، ٣٨ درجة

٢) أكبر من ٣٩ درجة

٣) واقعة بين ٢٦ درجة ، ٣٢ درجة

٧) إذا كان ارتفاع مياه الأمطار خلال شهر فبراير يتبع توزيعاً طبيعياً متوسطه μ = ٣سم ، وتباينه σ^2= ٤سم٢ فأوجد احتمال أن يكون ارتفاع الأمطار في شهر فبراير في العام التالي :

١) أكبر من ١سم

٢) بين ٣,٥ سم ، ٤ سم

نموذج امتحان الكتاب المدرسى رقم (١) — ابداع

س١ أ **أكمل العبارات الآتية :**

١) **إذا كان** أ ، ب حدثين من فضاء العينة ف لتجربة عشوائية حيث ل ($\bar{ب}$) = ٠,٦

فإن قيمة ل ($\bar{أ}$ ∩ ب) + ل (أ) × ل (ب / أ) = ...

٢) **إذا كانت** ص متغيرًا طبيعيًا معياريًا بحيث ل (ك ⩽ ص ⩽ ١,٥) = ٠,٠٣

فإن قيمة ك = ...

٣) **إذا كان** أ ، ب حدثين مستقلين من فضاء العينة ف لتجربة عشوائية

حيث ل (أ) = ٠,٣ ، ل (ب) = ٠,٨ **فإن** ل (أ − ب) = ...

٤) **إذا كان** س متغيرًا عشوائيًا متقطعًا وتوقعه يساوى ٥، $\sum$ $س_ر^٢$. د($س_ر$)=٣٤

فإن الانحراف المعيارى يساوى ....

٥) **إذا كانت** معادلة انحدار ص على س هى $\hat{ص}$ = ٠,٢ س + ٣

وكانت قيمة ص الجدولية عندما س = ٥ هى ٤,٦

فإن مقدار الخطأ فى قيمة ص تساوى ....

ب أ ، ب حدثان حيث ل (أ) = ٠,٦ ، ل ($\bar{أ}$ ∩ ب) = ٠,٢ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٣

فاحسب : ١) ل (ب / أ) [$\frac{١}{٢}$]

٢) ل ($\bar{أ}$ / $\bar{ب}$) [$\frac{٢}{٥}$]

س٢ أ **الجدول الآتى** يبين تقديرات ٦ طلاب فى مادتى الرياضيات (س) والإحصاء (ص)

احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين س ، ص وحدد نوعه.

س	ممتاز	مقبول	جيد	مقبول	جيد جدًا	جيد جدًا
ص	جيد جدًا	مقبول	مقبول	جيد	جيد	ممتاز

ب **إذا كان** س متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا متوسطة μ = ١٠ وانحرافه المعيارى σ = ٢,٥ **أوجد :**

١) ل (س ⩽ ١٢,٥).

٢) إذا كان ل (س ⩽ ك) = ٠,١٠٥٦ **فأوجد** قيمة ك.

س٣ أ **إذا كان** سـ متغيرًا عشوائيًا متصلاً وكانت :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{س - ١}{٨} & ، حيث ١ \leqslant س \leqslant ٥ \\ صفر & فيما عدا ذلك \end{cases}$$

١) **أثبت أن** د (س) هى دالة كثافة الاحتمال العشوائى سـ

٢) **احسب** ل (٢ < سـ < ٣)

ب **إذا كان** الدخل الشهرى لعدد ١٠٠٠ أسرة فى إحدى المدن هو متغير عشوائى طبيعى متوسطه ١٧٠٠ جنيه وانحرافه المعيارى ٢٠٠ جنيه واختيرت أسرة عشوائيًا من هذه الأسر **فأوجد** عدد الأسر التى يزيد دخلها عن ١٥٠٠ جنية.

س٤ أ **إذا كان** سـ متغيرًا عشوائيًا متقطعًا مداه { -٢ ، -١ ، صفر ، ١ ، ٢ }

وكان ل (سـ = ر) = $\frac{أ + ر}{١٥}$ لكل ر تنتمى إلى مدى سـ

فأوجد قيمة أ **ثم أوجد** الانحراف المعيارى للمتغير سـ

ب **إذا كان :** $\sum$ س = ٤٩ ، $\sum$ ص = ٤٥ ، $\sum$ س^2 = ٣٥٩ ، $\sum$ ص^2 = ٣٠٣ ، $\sum$ س ص = ٣٢٠ ، ن = ٧

١) **احسب** معامل الارتباط لبيرسون بين قيم س ، ص وعين نوعه.

٢) قدر قيمة ص عندما س = ٩ باستخدام خط الانحدار.

نموذج امتحان الكتاب المدرسى رقم (٢)

ابداع

س١ أ **اختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس :**

١) إذا أُلقى حجر نرد منتظم مرة واحدة فإن احتمال ظهور العدد ٥ علمًا بأن العدد الظاهر فردى يساوى .... [$\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٣}{٤}$]

٢) **إذا كان** أ ، ب حدثين وكان ل (أ ∩ ب) = ٠,٢ ، ل (ب) = ٠,٤

فإن ل (أ / ب) = ... [٠,٥ ، ٠,٠٦ ، ٠,١٤ ، ٠,١]

٣) قيمة ك فى التوزيع الاحتمالى التالى هى

سر	٣	٥	٨
د (سر)	ك^2	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$

[$\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٣}{٤}$ ، ١]

٤) **إذا كانت** درجات فصل امتحان الإحصاء تتبع توزيعًا طبيعيًّا متوسطه ٧٦ وانحرافه المعيارى ٥، وحصل أحمد فى هذا الامتحان على ٦٦ درجة فإن درجة أحمد فى صورة معيارية هى : ...... [٣ ، -٢ ، ١ ، ٢]

٥) المعامل الذى يمثل أقوى علاقة بين متغيرين هو ......

[-٠,٥٨ ، ٠,٤٨ ، ٠,٦٨ ، -٠,٧٨]

ب صندوق يحوى ٩ كرات متماثلة فى الحجم والملمس ومرقمة بالأرقام ٠، ١، ٢، ...، ٨ سحبت عشوائيًّا منه كرتان الواحدة تلو الأخرى دون إرجاع، **احسب احتمال أن :**

١) الكرة الأولى تحمل رقمًا زوجيًّا والثانية تحمل رقمًا زوجيًّا (الحصول على رقمين زوجيين).

٢) الكرة الأولى تحمل رقمًا فرديًّا والثانية تحمل رقمًا زوجيًّا.

س٢ أ **من بيانات الجدول الآتى :**

س	١٥٠	١٨٠	١٥٠	١٢٠	١٢٠	١٠٠
ص	١٢٠	١٢٠	١٠٠	٨٠	٨٠	١٠٠

احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين س ، ص.

ب **إذا كان** س متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا وتوزيعه الاحتمالى كالآتى :

سر	١	٢	٤	٦
د (سر)	٠,٢	أ	٠,٤	٠,١

فأوجد قيمة أ ثم احسب قيمة كل من المتوسط والانحراف المعيارى للمتغير العشوائى س

س٣ أ إذا كانت الأجور الشهرية لمجموعة من الموظفين فى إحدى الشركات تتوزع توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط μ وانحراف معيارى σ = ٢٥٠ جنيهًا وكانت النسبة المئوية لعدد الموظفين الذين تزيد أجورهم عن ٢١٥٠ جنيهًا هى ٩٧,٧٢٪ **فأوجد قيمة** μ.

ب **إذا كانت** س متغيرًا عشوائيًّا متصلاً، دالة كثافة الاحتمال له هى :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{٨}(س + ك) & \text{عندما } ٢ \leqslant س \leqslant ٤ \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

١) **أوجد** قيمة ك.

٢) **أوجد** ل (س > ٣)



س٤ أ **إذا كان:** $\sum$ س = ٤٠ ، $\sum$ ص = ٣٠ ، $\sum$ س^2 = ٣٦٠ ، $\sum$ ص^2 = ٢٠٠

، $\sum$ س ص = ٢٣٢ ، ن = ٥ **فأوجد**

١) معامل الارتباط الخطى لبيرسون بين س ، ص

٢) معادلة خط انحدار ص على س ثم قدر قيمة ص عندما س = ٩

ب **إذا كان:** صـ متغيرًا عشوائيًا معياريًا

فأوجد قيمة(ك) إذا كان : ل (صـ ≥ ك) = ٠,١١٧٠

نموذج امتحان الكتاب المدرسى رقم (٣) — ابداع

س١ أ **أكمل العبارات الآتية :**

١) **إذا كان** ل (ب) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (أ ∪ ب) = $\frac{٥}{٦}$

فإن (أَ / بَ) يساوى .... [$\frac{١}{٣}$]

٢) **إذا كان** سـ متغيرًا عشوائيًا مداه { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }

وكان ل (سـ = ٠)= ل (سـ = ٤)= $\frac{١}{١٦}$ ، ل (سـ = ١) = ل (سـ = ٣) = $\frac{١}{٤}$

فإن ل (سـ = ٢) يساوى .... [$\frac{٣}{٨}$]

٣) **إذا كان** سـ متغيرًا عشوائيًا متصلاً ودالة كثافة الاحتمال له هى :

د (س) = { أ عندما −٣ ≤ س ≤ ٣ ، صفر فيما عدا ذلك

فإن أ تساوى = ... [$\frac{١}{٦}$]

٤) **إذا كان** أ ، ب حدثين مستقلين، ل (أ) = ٠,٣ ، ل (ب) = ٠,٦

فإن ل (أ ∪ ب) = س **فإن** س = ... [٠,٧٢]

٥) **إذا كانت** أطوال مجموعة مكونة من ١٠٠٠ شخص تتبع توزيعـًا طبيعيًـا متوسـطه ١٧٦$\frac{١}{٢}$ وانحرافه المعيارى ٥ فإن عدد الأشخاص الذين يزيد طول كل منـهم عـن ١٨٥ سم يساوى .... [٤٥]

ب **إذا كان** أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ف **فأثبت أن :**

ل (ب)= ل (أ) × ل (ب / أ) + ل (أَ)×ل (ب / أَ)

ثم استخدم ذلك لحساب ل (ب)

إذا كان ل (أ) = ٠,٦ ، ل (ب / أَ) = ٠,٨ ، ل (ب / أ) = ٠,٣ [٠,٥]



س٢ أ **إذا كانت** سـ متغيرًا عشوائيًا متصلاً، دالة كثافة الاحتمال له هى :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{٢س + ١}{٢٤} &، ٢ \leqslant س \leqslant ٥ \\ صفر & فيما عدا ذلك. \end{cases}$$

أحسب كلاً من : ١) ل (٣ ⩽ سـ ⩽ ٥) $[\frac{٣}{٤}]$

٢) ل (سـ ⩽ ٤) $[\frac{٧}{١٢}]$

ب **أوجد** معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين المتغيرين س ، ص من بيانات الجدول الآتى :

س	١٠	١٦	١٥	١٧	١٨
ص	٥	٧	٨	٦	٩

[٠,٦]

س٣ أ **إذا كانت** سـ متغيرًا عشوائيًا وكان توزيعه الاحتمالى يعطى بالدالة د **حيث** :

د (س) = $\frac{س}{١٠}$ ، س ∈ { ١ ، ٢ ، ٣ ، ك } **فأوجد** :

١) قيمة ك واكتب التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى سـ

٢) التوقع والتباين للمتغير العشوائى سـ [٣ ، ١]

ب **إذا كانت** سـ متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا وسطه الحسابى μ = ٥٠، وانحرافه المعيارى σ

فأوجد σ **إذا كان** ل (سـ ⩽ ٣٧,٢٥) = ٠,٠٤٤٦ [٧,٥]

س٤ أ لدراسة العلاقة بين الكمية المطلوبة (ص) بالكيلو جرام والسعر (س) بالجنية لمنتج معين كان لدينا البيانات الآتية :

$\sum$ س = ٢٥ ، $\sum$ ص = ٣٠ ، $\sum$ س ص = ١٨١ ، $\sum$ س^٢ = ١٥٥

، $\sum$ ص^٢ = ٢٤٩ ، ن = ٥ **أوجد :**

١) معامل الارتباط لبيرسون بين س ، ص. [٠,٦٧٧]

٢) معامل انحدار الكمية المطلوبة على السعر. $[\frac{٣١}{٣٠}]$

ب **إذا كان** ل (ب / أ) = $\frac{٢}{٣}$ ، ل (ب / أَ) = $\frac{٥}{٨}$ ، ل (أ) = $\frac{٣}{٤}$ **أوجد** ل (أ ∪ ب).

$[\frac{٢٩}{٣٢}]$

نموذج امتحان الكتاب المدرسي رقم (٥) ابداع

أ) أكمل العبارات الآتية :

١) إذا كان ل (أ´) = ٠,٣ ، ل (ب) = ٠,٤ ، ل (أ ∩ ب)= ٠,٢ فإن ل (أ | ب)

(١/٢ ، ٥/٦ ، ١ ، ٣/٤)

٢) قيمة المعامل الذي يمثل أقوي علاقة بين متغيرين هو ....

(-٠,٢ ، ٠,١ ، -٠,٨ ، ٠,٧)

٣) إذا كان س متغيرا عشوائيا مداه {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} و كان ل (س=١)

= ٢ل (س=٢) = ١/٤ ، ل (س=٣) = ٧/١٦ فإن ل(س=٥) يساوي ....

(٣/٨ ، ٣/١٦ ، ٣/٤ ، ١١/١٦)

٤) شكل الانتشار الذي يمثل ارتباط طردي هو ....

(أ) (ب) (هـ) (د)

٥) إذا كان في علاقة بين متغيرين س،ص ، ∑ س ر . د(س ر) = ٤ ،

∑ س^٢ ر.د(س ر) = ٢٥ فإن معامل الاختلاف يساوي ....

(١٦ % ، ٧٥ % ، ٦٤ % ، ١٥,٦ %)

ب) إذا كان أ ، ب حدثين مستقلين من فضاء عينة ف لتجربة عشوائية ل (أ) =٢ل (ب)= س

، ل (أ ∪ ب)= ٧/٩ فأوجد قيمة س .

٢- (أ) إذا كان س متغيرا عشوائيا متصلا دالة كثافة الاحتمال له هي :

د(س)= { ١/٣٢ (س + ٤) حيث - ك ⩽ س ⩽ ك
صفر فيما عد ذلك

أوجد قيمة : ١- قيمة ك ٢- ل(س ⩽ ٠) ٣- ل(-٢ ⩽ س ⩽ ٢)

(ب) الجدول التالي يبين التقديرات التي حصل عليها ثمانية طلاب في إحدى الكليات في مادتي الرياضيات و الفيزياء :

الرياضيات	ممتاز	جيد	جيد جدا	جيد جدا	ضعيف	ممتاز	مقبول	جيد جدا
الفيزياء	جيد جدا	جيد جدا	جيد	ممتاز	مقبول	ممتاز	مقبول	ممتاز

أوجد معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين التقديرات في المادتين و حدد نوعه .

٣- أ- إذا كانت أوزان الطلاب في إحدى الكليات تتبع توزيعا طبيعيا وسطه الحسابي ٥٥ كجم و انحرافه المعياري σ و كانت أوزان ٣٣ ٪ من الطلاب تزيد عن ٦٦ كجم .فأوجد :

١- الانحراف المعياري

٢-إذا كان عدد الطلاب ١٠٠٠٠ طالب فأحسب عدد الطلاب الذين تقل أوزانهم عن ٦٠ كجم

ب - إذا كان س متغيرا عشوائيا متقطعا وسطه الحسابي و توزيعه الاحتمالي كالآتي

$س_ر$	صفر	ك	٣	٤
د ($س_ر$)	م	١/٦	٤م	٥م

أوجد : (أ) قيمتي م ، ك

(ب) الانحراف المعياري و معامل الاختلاف للمتغير س

٤ - أ – صندوق به خمس بطاقات متماثلة مرقمة من ١ إلى ٥ سحبت بطاقتان واحدة تلو الأخرى مع إحلال أوجد احتمال :

١- أن يكون مجموع العددين على البطاقتين عدا أوليا .

٢- أن يكون حاصل ضرب العددين أقل من ٧ إذا كان مجموعهما عددا أوليا .

ب - في دراسة للعلاقة بين المتغيرين س ، ص حصلنا – على النتائج التالية :

$\sum$ س = ٣٥ ، $\sum$ ص = ٦٠ ، $\sum$ س ص = ١٨٧

$\sum$ $س^٢$ = ١٣٤ ، $\sum$ $ص^٢$ = ٤٠٦ ن = ١٠ فأوجد :

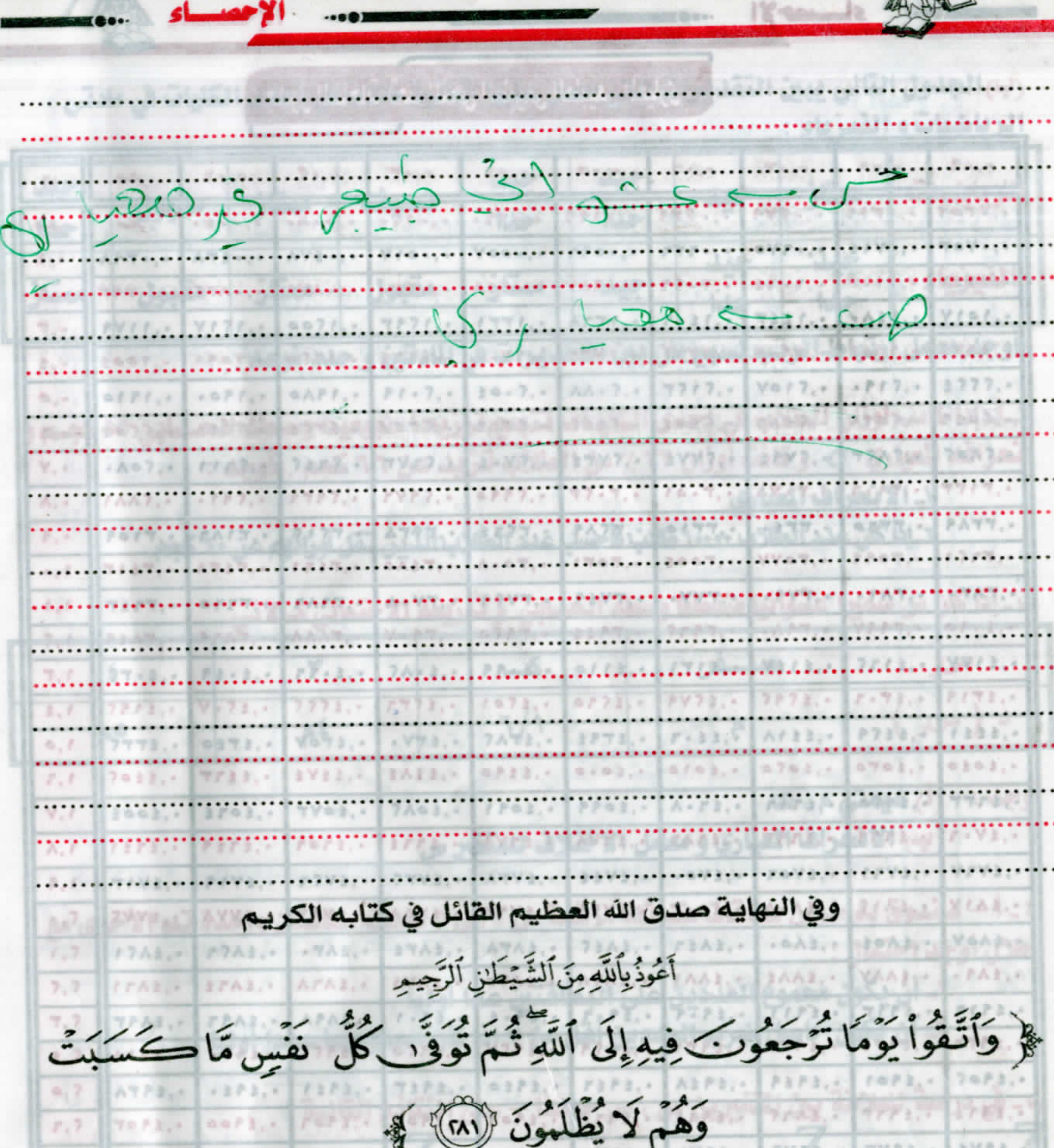
١- معادلة خط انحدار ص على س .

٢- معامل الارتباط الخطي لبيرسون بين س ، ص ثم حدد نوعه .



جدول المساحات تحت المنحى الطبيعى الطبيعى المعيارى

ع	صفر	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٣	٠,٠٤	٠,٠٥	٠,٠٦	٠,٠٧	٠,٠٨	٠,٠٩
صفر	صفر	٠,٠٠٤٠	٠,٠٠٨٠	٠,٠١٢٠	٠,٠١٦٠	٠,٠١٩٩	٠,٠٢٣٩	٠,٠٢٧٩	٠,٠٣١٩	٠,٠٣٥٩
٠,١	٠,٠٣٩٨	٠,٠٤٣٨	٠,٠٤٧٨	٠,٠٥١٧	٠,٠٥٥٧	٠,٠٥٩٦	٠,٠٦٣٦	٠,٠٦٧٥	٠,٠٧١٤	٠,٠٧٥٣
٠,٢	٠,٠٧٩٣	٠,٠٨٣٢	٠,٠٨٧١	٠,٠٩١٠	٠,٠٩٤٨	٠,٠٩٨٧	٠,١٠٢٦	٠,١٠٦٤	٠,١١٠٣	٠,١١٤١
٠,٣	٠,١١٧٩	٠,١٢١٧	٠,١٢٥٥	٠,١٢٩٣	٠,١٣٣١	٠,١٣٦٨	٠,١٤٠٦	٠,١٤٤٣	٠,١٤٨٠	٠,١٥١٧
٠,٤	٠,١٥٥٤	٠,١٥٩١	٠,١٦٢٨	٠,١٦٦٤	٠,١٧٠٠	٠,١٧٣٦	٠,١٧٧٢	٠,١٨٠٨	٠,١٨٤٤	٠,١٨٧٩
٠,٥	٠,١٩١٥	٠,١٩٥٠	٠,١٩٨٥	٠,٢٠١٩	٠,٢٠٥٤	٠,٢٠٨٨	٠,٢١٢٣	٠,٢١٥٧	٠,٢١٩٠	٠,٢٢٢٤
٠,٦	٠,٢٢٥٧	٠,٢٢٩١	٠,٢٣٢٤	٠,٢٣٥٧	٠,٢٣٨٩	٠,٢٤٢٢	٠,٢٤٥٤	٠,٢٤٨٦	٠,٢٥١٨	٠,٢٥٤٩
٠,٧	٠,٢٥٨٠	٠,٢٦١١	٠,٢٦٤٢	٠,٢٦٧٣	٠,٢٧٠٤	٠,٢٧٣٤	٠,٢٧٧٤	٠,٢٧٩٤	٠,٢٨٢٣	٠,٢٨٥٢
٠,٨	٠,٢٨٨١	٠,٢٩١٠	٠,٢٩٣٩	٠,٢٩٧٦	٠,٢٩٩٥	٠,٣٠٢٣	٠,٣٠٥١	٠,٣٠٧٨	٠,٣١٠٦	٠,٣١٣٣
٠,٩	٠,٣١٥٩	٠,٣١٨٦	٠,٣٢١٢	٠,٣٢٣٨	٠,٣٢٦٤	٠,٣٢٨٩	٠,٣٣١٥	٠,٣٣٤٠	٠,٣٣٦٥	٠,٣٣٨٩
١,٠	٠,٣٤١٣	٠,٣٤٣٨	٠,٣٤٦١	٠,٣٤٨٥	٠,٣٥٠٨	٠,٣٥٣١	٠,٣٥٥٤	٠,٣٥٧٧	٠,٣٥٩٩	٠,٣٦٢١
١,١	٠,٣٦٤٣	٠,٣٦٦٥	٠,٣٦٨٦	٠,٣٧٠٨	٠,٣٧٢٩	٠,٣٧٤٩	٠,٣٧٧٠	٠,٣٧٩٠	٠,٣٨١٠	٠,٣٨٣٠
١,٢	٠,٣٨٤٩	٠,٣٨٦٩	٠,٣٨٨٨	٠,٣٩٠٧	٠,٣٩٢٥	٠,٣٩٤٤	٠,٣٩٦٢	٠,٣٩٨٠	٠,٣٩٩٧	٠,٤٠١٥
١,٣	٠,٤٠٣٢	٠,٤٠٤٩	٠,٤٠٦٦	٠,٤٠٨٢	٠,٤٠٩٩	٠,٤١١٥	٠,٤١٣١	٠,٤١٤٧	٠,٤١٦٢	٠,٤١٧٧
١,٤	٠,٤١٩٢	٠,٤٢٠٧	٠,٤٢٢٢	٠,٤٢٣٦	٠,٤٢٥١	٠,٤٢٦٥	٠,٤٢٧٩	٠,٤٢٩٢	٠,٤٣٠٦	٠,٤٣١٩
١,٥	٠,٤٣٣٢	٠,٤٣٤٥	٠,٤٣٥٧	٠,٤٣٧٠	٠,٤٣٨٢	٠,٤٣٩٤	٠,٤٤٠٦	٠,٤٤١٨	٠,٤٤٢٩	٠,٤٤٤١
١,٦	٠,٤٤٥٢	٠,٤٤٦٣	٠,٤٤٧٤	٠,٤٤٨٤	٠,٤٤٩٥	٠,٤٥٠٥	٠,٤٥١٥	٠,٤٥٢٥	٠,٤٥٣٥	٠,٤٥٤٥
١,٧	٠,٤٥٥٤	٠,٤٥٦٤	٠,٤٥٧٣	٠,٤٥٨٢	٠,٤٥٩١	٠,٤٥٩٩	٠,٤٦٠٨	٠,٤٦١٦	٠,٤٦٢٥	٠,٤٦٣٣
١,٨	٠,٤٦٤١	٠,٤٦٤٩	٠,٤٦٥٦	٠,٤٦٦٤	٠,٤٦٧١	٠,٤٦٧٨	٠,٤٦٨٦	٠,٤٦٩٣	٠,٤٦٩٩	٠,٤٧٠٦
١,٩	٠,٤٧١٣	٠,٤٧١٩	٠,٤٧٢٦	٠,٤٧٣٢	٠,٤٧٣٨	٠,٤٧٤٤	٠,٤٧٥٠	٠,٤٧٥٦	٠,٤٧٦١	٠,٤٧٦٧
٢,٠	٠,٤٧٧٢	٠,٤٧٧٨	٠,٤٧٨٣	٠,٤٧٨٨	٠,٤٧٩٣	٠,٤٧٩٨	٠,٤٨٠٣	٠,٤٨٠٨	٠,٤٨١٢	٠,٤٨١٧
٢,١	٠,٤٨٢١	٠,٤٨٢٦	٠,٤٨٣٠	٠,٤٨٣٤	٠,٤٨٣٨	٠,٤٨٤٢	٠,٤٨٤٦	٠,٤٨٥٠	٠,٤٨٥٤	٠,٤٨٥٧
٢,٢	٠,٤٨٦١	٠,٤٨٦٤	٠,٤٨٦٨	٠,٤٨٧١	٠,٤٨٧٥	٠,٤٨٧٨	٠,٤٨٨١	٠,٤٨٨٤	٠,٤٨٨٧	٠,٤٨٩٠
٢,٣	٠,٤٨٩٣	٠,٤٨٩٦	٠,٤٨٩٨	٠,٤٩٠١	٠,٤٩٠٤	٠,٤٩٠٦	٠,٤٩٠٩	٠,٤٩١١	٠,٤٩١٣	٠,٤٩١٦
٢,٤	٠,٤٩١٨	٠,٤٩٢٠	٠,٤٩٢٢	٠,٤٩٢٥	٠,٤٩٢٧	٠,٤٩٢٩	٠,٤٩٣١	٠,٤٩٣٢	٠,٤٩٣٤	٠,٤٩٣٦
٢,٥	٠,٤٩٣٨	٠,٤٩٤٠	٠,٤٩٤١	٠,٤٩٤٣	٠,٤٩٤٥	٠,٤٩٤٦	٠,٤٩٤٨	٠,٤٩٤٩	٠,٤٩٥١	٠,٤٩٥٢
٢,٦	٠,٤٩٥٣	٠,٤٩٥٥	٠,٤٩٥٦	٠,٤٩٥٧	٠,٤٩٥٩	٠,٤٩٦٠	٠,٤٩٦١	٠,٤٩٦٢	٠,٤٩٦٣	٠,٤٩٦٤
٢,٧	٠,٤٩٦٥	٠,٤٩٦٦	٠,٤٩٦٧	٠,٤٩٦٨	٠,٤٩٦٩	٠,٤٩٧٠	٠,٤٩٧١	٠,٤٩٧٢	٠,٤٩٧٣	٠,٤٩٧٤
٢,٨	٠,٤٩٧٤	٠,٤٩٧٥	٠,٤٩٧٦	٠,٤٩٧٧	٠,٤٩٧٧	٠,٤٩٧٨	٠,٤٩٧٩	٠,٤٩٧٩	٠,٤٩٨٠	٠,٤٩٨١
٢,٩	٠,٤٩٨١	٠,٤٩٨٢	٠,٤٩٨٢	٠,٤٩٨٢	٠٤٩٨٤	٠,٤٩٨٤	٠,٤٩٨٥	٠,٤٩٨٥	٠,٤٩٨٦	٠,٤٩٨٦
٣,٠	٠,٤٩٨٧	٠,٤٩٨٧	٠,٤٩٨٧	٠,٤٩٨٨	٠,٤٩٨٨	٠,٤٩٨٩	٠,٤٩٨٩	٠,٤٩٨٩	٠,٤٩٩٠	٠,٤٩٩٠
٣,١	٠,٤٩٩٠	٠,٤٩٩١	٠,٤٩٩١	٠,٤٩٩١	٠,٤٩٩١	٠,٤٩٩٢	٠,٤٩٩٢	٠,٤٩٩٢	٠,٤٩٩٣	٠,٤٩٩٣
٣,٢	٠,٤٩٩٣	٠,٤٩٩٣	٠,٤٩٩٤	٠,٤٩٩٤	٠,٤٩٩٤	٠,٤٩٩٤	٠,٤٩٩٤	٠,٤٩٩٥	٠,٤٩٩٥	٠,٤٩٩٥



وفي النهاية صدق الله العظيم القائل في كتابه الكريم

أَعُوذُ بِاللَّهِ مِنَ الشَّيْطَانِ الرَّجِيمِ

﴿وَاتَّقُوا يَوْمًا تُرْجَعُونَ فِيهِ إِلَى اللَّهِ ثُمَّ تُوَفَّىٰ كُلُّ نَفْسٍ مَّا كَسَبَتْ وَهُمْ لَا يُظْلَمُونَ ﴿٢٨١﴾﴾

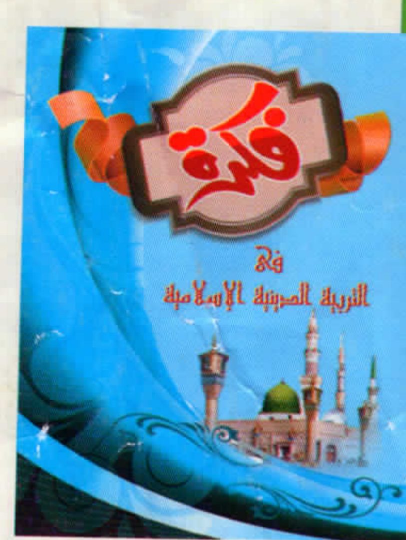
البقرة: ٢٨١

لضمان النجاح والتفوق...

أطلب سلاسل.











بسم الله الرحمن الرحيم

قام بإعداد هذه النسخة pdf
وفهرستها ورفعها :
د محمد أحمد محمد عاصم
نسألكم الدعاء